

Applications linéaires

ECG2 - mathématiques approfondies

1. Méthode

Rappel de méthode

À retenir – Méthodes et rédaction

1. **Montrer la linéarité.** Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$f(\lambda u + v) = \dots = \lambda f(u) + f(v).$$

Ainsi, f est une application linéaire de E dans F .

2. **Déterminer le noyau.** Soit $u \in E$. On résout :

$$u \in \ker(f) \iff f(u) = 0_F \iff \dots$$

On exprime les solutions à l'aide de paramètres, puis on écrit $\ker(f) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. On justifie que la famille est libre pour conclure qu'elle est une base du noyau.

3. **Déterminer l'image.** Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Par linéarité,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

On calcule ces images, puis on extrait une famille libre qui engendre le même espace : elle constitue une base de l'image.

2. Applications

Pour chacune des applications ci-dessous :

- Montrer que f est une application linéaire.
- Déterminer une base de $\ker(f)$.
- Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
- Donner la matrice de f dans les bases canoniques.

Exercice 1 De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + y, 2x + 2y).$$

Correction.

1. Soient $u = (x, y)$, $v = (x', y')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (\lambda(x + y) + x' + y', \\ &\quad 2\lambda(x + y) + 2x' + 2y') \\ &= \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire.

2. $f(x, y) = (0, 0) \iff x + y = 0 \iff (x, y) = x(1, -1)$. Donc $\ker(f) = \text{Vect}((1, -1))$. Le vecteur $(1, -1)$ est non nul : il constitue une base du noyau.
3. Pour la base canonique (e_1, e_2) , $f(e_1) = f(e_2) = (1, 2)$. Ainsi $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 2))$. Le vecteur $(1, 2)$ étant non nul, il constitue une base de l'image.
4. La matrice de f a pour colonnes les coordonnées des images des vecteurs de la base canonique de départ. Ainsi,

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (x, x + y, y).$$

Correction.

1. Pour $u = (x, y)$, $v = (x', y')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (\lambda x + x', \\ &\quad \lambda(x + y) + x' + y', \lambda y + y') \\ &= \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2. $f(x, y) = (0, 0, 0) \iff x = y = 0$. Ainsi $\ker(f) = \{(0, 0)\}$: sa base est la famille vide et sa dimension est zéro.
3. $f(e_1) = (1, 1, 0)$ et $f(e_2) = (0, 1, 1)$ engendrent l'image. Si $a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) = 0$, les première et troisième coordonnées donnent $a = b = 0$. Ces deux vecteurs forment donc une base de l'image.
4. La matrice de f a pour colonnes les coordonnées des images des vecteurs de la base canonique de départ. Ainsi,

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 De $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z).$$

Correction.

1. Pour $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (\lambda(x + y) + x' + y', \\ &\quad \lambda(y + z) + y' + z') \\ &= \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire.

2. $f(x, y, z) = 0 \iff x = -y$ et $z = -y$. Donc $(x, y, z) = y(-1, 1, -1)$. Le vecteur non nul $(-1, 1, -1)$ constitue une base du noyau.
3. Les images de la base canonique sont $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$. Comme $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$, $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0), (0, 1)) = \mathbb{R}^2$. Sa base canonique est une base de l'image.
4. La matrice de f a pour colonnes les coordonnées des images des vecteurs de la base canonique de départ. Ainsi,

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 De $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, x - z).$$

Correction.

1. Pour $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (\lambda(x - y) + x' - y', \\ &\quad \lambda(y - z) + y' - z', \\ &\quad \lambda(x - z) + x' - z') \\ &= \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire.

2. $f(x, y, z) = 0 \iff x = y = z$. Donc $\ker(f) = \text{Vect}((1, 1, 1))$, avec pour base le vecteur non nul $(1, 1, 1)$.
3. Les images sont $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ et $v_3 = (0, -1, -1)$. Or $v_3 = -v_1 - v_2$: l'image est engendrée par v_1, v_2 . Si $av_1 + bv_2 = 0$, la deuxième coordonnée donne $b = 0$, puis la première $a = 0$. Ainsi (v_1, v_2) est une base de l'image.
4. La matrice de f a pour colonnes les coordonnées des images des vecteurs de la base canonique de départ. Ainsi,

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Des matrices aux vecteurs

On considère $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + d, b + c).$$

Correction.

1. Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= (\lambda(a + d) + a' + d', \\ &\quad \lambda(b + c) + b' + c') \\ &= \lambda f(M) + f(N). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2. $M \in \ker(f) \iff d = -a$ et $c = -b$. Ainsi

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices engendrent le noyau. Une combinaison nulle impose $a = b = 0$ en regardant la première ligne : elles forment donc une base du noyau.

3. Dans la base canonique des matrices,

$$\begin{aligned} f(E_{11}) &= f(E_{22}) = (1, 0), \\ f(E_{12}) &= f(E_{21}) = (0, 1). \end{aligned}$$

Donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$; la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est une base de l'image.

4. La matrice de f a pour colonnes les coordonnées des images des vecteurs de la base canonique de départ. Ainsi,

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 Produit par une matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et on considère

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM.$$

Correction.

1. Pour $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N)$.
Donc f est linéaire.
2. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{pmatrix}.$$

Ainsi $AM = 0 \iff c = -a$ et $d = -b$. Donc

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices sont libres (regarder la première ligne) et engendrent le noyau : elles en forment une base.

3. Les images des matrices canoniques sont

$$f(E_{11}) = f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = U,$$

$$f(E_{12}) = f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = V.$$

Donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(U, V)$. La première ligne de $aU + bV = 0$ impose $a = b = 0$, donc (U, V) est une base de l'image.

4. La matrice de f a pour colonnes les coordonnées des images des vecteurs de la base canonique de départ. Ainsi,

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 Dérivation

On considère

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = P'.$$

Correction.

1. Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_2[X]$: f est bien définie. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)' \\ &= \lambda P' + Q' = \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2. Écrivons $P = a + bX + cX^2 + dX^3$. Alors $P' = b + 2cX + 3dX^2$. Par identification des coefficients, $P' = 0 \iff b = c = d = 0$. Donc $\ker(f) = \text{Vect}(1)$. Le polynôme 1 est non nul : il constitue une base du noyau.

3. Les images de la base canonique sont $0, 1, 2X, 3X^2$. Ainsi

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X].$$

La base canonique $(1, X, X^2)$ est une base de l'image.

4. Les colonnes sont les coordonnées de $f(1), f(X), f(X^2)$ et $f(X^3)$ dans $(1, X, X^2)$:

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 Évaluation

On considère

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(P) = (P(0), P(1)).$$

Correction.

1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P(0) + Q(0), \\ &\quad \lambda P(1) + Q(1)) \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2. Pour $P = a + bX + cX^2$,

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\iff a = 0 \text{ et } a + b + c = 0 \\ &\iff a = 0 \text{ et } b = -c. \end{aligned}$$

Ainsi $P = c(X^2 - X)$ et $\ker(f) = \text{Vect}(X^2 - X)$. Ce polynôme non nul constitue une base du noyau.

3. On a $f(1) = (1, 1)$ et $f(X) = f(X^2) = (0, 1)$. Ainsi l'image est engendrée par $(1, 1)$ et $(0, 1)$. Une relation $\alpha(1, 1) + \beta(0, 1) = 0$ impose $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$. Ces deux vecteurs forment donc une base de l'image, qui est $\mathbb{R}^2$.

4. Les coordonnées des images précédentes donnent

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 Une application sur $\mathbb{R}_2[X]$

On considère

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = XP' - 2P.$$

Correction.

1. Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $XP' - 2P \in \mathbb{R}_2[X]$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= X(\lambda P' + Q') - 2(\lambda P + Q) \\ &= \lambda(XP' - 2P) + (XQ' - 2Q) \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire.

2. Pour $P = a + bX + cX^2$,

$$f(P) = X(b + 2cX) - 2P = -2a - bX.$$

Donc $f(P) = 0 \iff a = b = 0$, et $\ker(f) = \text{Vect}(X^2)$. Le polynôme non nul X^2 constitue une base du noyau.

3. $f(1) = -2$, $f(X) = -X$, $f(X^2) = 0$. Ainsi $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1, X)$. La famille $(1, X)$ est libre par identification des coefficients : elle constitue une base de l'image.

4. Dans la base $(1, X, X^2)$,

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 Différence de polynômes

On considère $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$f(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

Correction.

1. Le changement de variable $X \mapsto X+1$ ne fait pas dépasser le degré 3 : f est bien définie. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q)(X) &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) \\ &\quad - \lambda P(X) - Q(X) \\ &= \lambda f(P)(X) + f(Q)(X). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2. Pour $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, on développe :

$$\begin{aligned} f(P) &= b + c(2X + 1) \\ &\quad + d(3X^2 + 3X + 1) \\ &= (b + c + d) + (2c + 3d)X + 3dX^2. \end{aligned}$$

Ainsi $f(P) = 0 \iff 3d = 0, 2c + 3d = 0$ et $b + c + d = 0$, soit $b = c = d = 0$. Donc $\ker(f) = \text{Vect}(1)$, de base (1) .

3. Les images des polynômes canoniques sont

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, & f(X) &= 1, \\ f(X^2) &= 2X + 1, \\ f(X^3) &= 3X^2 + 3X + 1. \end{aligned}$$

Les trois polynômes non nuls engendrent l'image. Dans une combinaison nulle, l'identification des coefficients de X^2 , puis de X , puis de 1 impose successivement que les trois coefficients de la combinaison soient nuls. Cette famille est donc libre et forme une base de l'image. L'image est incluse dans $\mathbb{R}_2[X]$ et a dimension 3, donc elle est égale à $\mathbb{R}_2[X]$. On peut également choisir $(1, X, X^2)$ comme base de l'image.

4. Dans la base $(1, X, X^2, X^3)$, les coordonnées des images donnent

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Problèmes**Problème 1 Une famille d'applications linéaires**

Problème original de type concours, mathématiques approfondies.

Pour tout réel a , on considère l'application

$$f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_a(x, y, z) = (x + y + z, ax + y + z, ax + ay + z).$$

- Montrer que f_a est une application linéaire.
- Déterminer une base de $\ker(f_a)$ suivant les valeurs de a .
- Déterminer une base de $\text{Im}(f_a)$ suivant les valeurs de a .
- Pour quelles valeurs de a l'application f_a est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
- Dans cette question, on suppose $a \neq 1$. Pour $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, déterminer les solutions de $f_a(x, y, z) = (u, v, w)$.
- On suppose désormais $a = 1$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f_1) \oplus \text{Im}(f_1)$.
- Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer son unique décomposition comme somme d'un vecteur de $\ker(f_1)$ et d'un vecteur de $\text{Im}(f_1)$.

Correction.

1. Soient $U = (x, y, z)$, $V = (x', y', z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f_a(\lambda U + V) &= (\lambda(x + y + z) + x' + y' + z', \\ &\quad \lambda(ax + y + z) + ax' + y' + z', \\ &\quad \lambda(ax + ay + z) + ax' + ay' + z') = \lambda f_a(U) + f_a(V). \end{aligned}$$

Ainsi f_a est linéaire.

2. En soustrayant la première équation à la deuxième, puis la deuxième à la troisième,

$$(x, y, z) \in \ker(f_a) \iff \begin{cases} x + y + z = 0, \\ (a - 1)x = 0, \\ (a - 1)y = 0. \end{cases}$$

Si $a \neq 1$, alors $x = y = 0$, puis $z = 0$. Le noyau est $\{0\}$: sa base est la famille vide. Si $a = 1$, la seule condition est $x + y + z = 0$. On écrit $(x, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$. Les vecteurs $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ sont libres, car leurs deuxième et troisième coordonnées donnent directement les coefficients d'une combinaison. Ils forment donc une base du noyau.

3. Les images de la base canonique sont $v_1 = (1, a, a)$, $v_2 = (1, 1, a)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$. Par linéarité, $\text{Im}(f_a) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Si $a \neq 1$, une relation $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ équivaut à $f_a(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Le noyau étant réduit à zéro, les trois coefficients sont nuls. La famille (v_1, v_2, v_3) est donc une base de l'image, qui est $\mathbb{R}^3$. Si $a = 1$, les trois vecteurs sont égaux à $(1, 1, 1)$: ce vecteur non nul constitue une base de l'image.
4. f_a est injective si et seulement si son noyau est réduit à zéro, et surjective si et seulement si son image vaut $\mathbb{R}^3$. Les deux propriétés, ainsi que la bijectivité, sont donc vérifiées exactement lorsque $a \neq 1$.
5. Le système équivaut à

$$\begin{cases} x + y + z = u, \\ (a - 1)x = v - u, \\ (a - 1)y = w - v. \end{cases}$$

Comme $a \neq 1$, il possède une unique solution :

$$(x, y, z) = \left(\frac{v - u}{a - 1}, \frac{w - v}{a - 1}, \frac{au - w}{a - 1} \right).$$

En effet, $z = u - x - y = u - (w - v)/(a - 1) = (au - w)/(a - 1)$.

6. Un vecteur de l'image s'écrit $t(1, 1, 1)$. Il appartient aussi au noyau si et seulement si $3t = 0$, donc $t = 0$. Ainsi $\ker(f_1) \cap \text{Im}(f_1) = \{0\}$. De plus, leurs dimensions sont 2 et 1, dont la somme vaut $3 = \dim \mathbb{R}^3$. Ils sont donc supplémentaires.
7. Posons $s = x + y + z$. On a

$$(x, y, z) = \left(x - \frac{s}{3}, y - \frac{s}{3}, z - \frac{s}{3} \right) + \frac{s}{3}(1, 1, 1).$$

La somme des coordonnées du premier vecteur vaut $s - s = 0$: il appartient au noyau. Le second appartient à l'image. L'unicité découle de la somme directe établie à la question précédente.

Problème 2 Un endomorphisme de l'espace des matrices

Problème original de type concours, mathématiques approfondies.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on considère

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM - MA.$$

Partie A – Noyau et image

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calculer $f(M)$.
- Déterminer une base de $\ker(f)$.
- Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
- Déterminer $\ker(f) \cap \text{Im}(f)$. Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
- Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer les conditions sur B pour que $AM - MA = B$ admette une solution, puis déterminer toutes ses solutions.

Partie B – Compositions

On note $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$.

7. Calculer $f^2(M)$, puis montrer que f^3 est l'application nulle.
8. Déterminer une base de $\ker(f^2)$ et une base de $\text{Im}(f^2)$.
9. On pose $g = \text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} + f$. Montrer que g est un automorphisme et déterminer son application réciproque.

Correction.**Partie A**

1. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $AM - MA$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A \\ &= \lambda(AM - MA) + (AN - NA) = \lambda f(M) + f(N). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même : c'est un endomorphisme.

2. On calcule

$$AM = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad MA = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad f(M) = \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

3. $M \in \ker(f) \iff c = 0$ et $d = a$. Donc $M = aI_2 + bE_{12}$, où $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La famille (I_2, E_{12}) engendre le noyau et est libre : les coefficients d'une combinaison nulle se lisent aux positions $(1, 1)$ et $(1, 2)$. C'est une base du noyau.
4. En posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a $f(M) = cD + (d-a)E_{12}$: l'image est incluse dans $\text{Vect}(D, E_{12})$. De plus $f(E_{21}) = D$ et $f(E_{22}) = E_{12}$: ces deux matrices appartiennent à l'image. Donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(D, E_{12})$. La famille est libre, par identification des coefficients $(1, 1)$ et $(1, 2)$; c'est une base de l'image.
5. Une matrice du noyau s'écrit $aI_2 + bE_{12}$. Elle appartient à l'image si et seulement si ses coefficients diagonaux sont opposés, soit $a = -a$, donc $a = 0$. Ainsi

$$\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \text{Vect}(E_{12}).$$

L'intersection contient une matrice non nulle : les sous-espaces ne sont pas supplémentaires.

6. Écrivons $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. D'après la question 2,

$$f(M) = B \iff c = p, \quad d - a = q, \quad r = 0, \quad s = -p.$$

L'équation est donc résoluble si et seulement si $r = 0$ et $s = -p$. Sous ces conditions, toutes ses solutions sont

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ p & a+q \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Partie B

7. Appliquons la formule de la question 2 à $f(M)$:

$$f^2(M) = \begin{pmatrix} 0 & -2c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -2cE_{12}.$$

Puisque $E_{12} \in \ker(f)$, $f^3(M) = f(-2cE_{12}) = 0$ pour toute matrice M . Donc f^3 est l'application nulle.

8. $f^2(M) = 0 \iff c = 0$. Ainsi $\ker(f^2)$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et

$$\ker(f^2) = \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{22}).$$

Les trois matrices sont libres par identification des coefficients : elles constituent une base du noyau. De plus $f^2(M) = -2cE_{12}$, avec c quelconque. Ainsi $\text{Im}(f^2) = \text{Vect}(E_{12})$; le vecteur non nul E_{12} en est une base.

9. g est linéaire car c'est une somme d'endomorphismes. Posons $h = \text{Id} - f + f^2$. Par distributivité de la composition,

$$(\text{Id} + f) \circ (\text{Id} - f + f^2) = \text{Id} + f^3 = \text{Id}.$$

De même, $h \circ g = \text{Id}$. Ainsi g est un automorphisme et

$$g^{-1} = \text{Id} - f + f^2.$$

Explicitement, pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$g^{-1}(M) = M - f(M) + f^2(M) = \begin{pmatrix} a-c & b-d+a-2c \\ c & d+c \end{pmatrix}.$$