

Applications linéaires

ECG2 - mathématiques approfondies

1. Méthode

Rappel de méthode

À retenir – Méthodes et rédaction

1. **Montrer la linéarité.** Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$f(\lambda u + v) = \dots = \lambda f(u) + f(v).$$

Ainsi, f est une application linéaire de E dans F .

2. **Déterminer le noyau.** Soit $u \in E$. On résout :

$$u \in \ker(f) \iff f(u) = 0_F \iff \dots$$

On exprime les solutions à l'aide de paramètres, puis on écrit $\ker(f) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. On justifie que la famille est libre pour conclure qu'elle est une base du noyau.

3. **Déterminer l'image.** Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Par linéarité,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

On calcule ces images, puis on extrait une famille libre qui engendre le même espace : elle constitue une base de l'image.

2. Applications

Pour chacune des applications ci-dessous :

- Montrer que f est une application linéaire.
- Déterminer une base de $\ker(f)$.
- Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
- Donner la matrice de f dans les bases canoniques.

Exercice 1 De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + y, 2x + 2y).$$

Exercice 2 De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (x, x + y, y).$$

Exercice 3 De $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z).$$

Exercice 4 De $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, x - z).$$

Exercice 5 Des matrices aux vecteurs

On considère $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + d, b + c).$$

Exercice 6 Produit par une matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et on considère

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM.$$

Exercice 7 Dérivation

On considère

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = P'.$$

Exercice 8 Évaluation

On considère

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(P) = (P(0), P(1)).$$

Exercice 9 Une application sur $\mathbb{R}_2[X]$

On considère

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = XP' - 2P.$$

Exercice 10 Différence de polynômes

On considère $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$f(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

3. Problèmes**Problème 1 Une famille d'applications linéaires**

Problème original de type concours, mathématiques approfondies.

Pour tout réel a , on considère l'application

$$f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_a(x, y, z) = (x + y + z, ax + y + z, ax + ay + z).$$

1. Montrer que f_a est une application linéaire.
2. Déterminer une base de $\ker(f_a)$ suivant les valeurs de a .
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f_a)$ suivant les valeurs de a .
4. Pour quelles valeurs de a l'application f_a est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
5. Dans cette question, on suppose $a \neq 1$. Pour $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, déterminer les solutions de $f_a(x, y, z) = (u, v, w)$.
6. On suppose désormais $a = 1$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f_1) \oplus \text{Im}(f_1)$.
7. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer son unique décomposition comme somme d'un vecteur de $\ker(f_1)$ et d'un vecteur de $\text{Im}(f_1)$.

Problème 2 Un endomorphisme de l'espace des matrices

Problème original de type concours, mathématiques approfondies.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on considère

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM - MA.$$

Partie A – Noyau et image

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calculer $f(M)$.
3. Déterminer une base de $\ker(f)$.
4. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
5. Déterminer $\ker(f) \cap \text{Im}(f)$. Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
6. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer les conditions sur B pour que $AM - MA = B$ admette une solution, puis déterminer toutes ses solutions.

Partie B – Compositions

On note $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$.

7. Calculer $f^2(M)$, puis montrer que f^3 est l'application nulle.
8. Déterminer une base de $\ker(f^2)$ et une base de $\text{Im}(f^2)$.
9. On pose $g = \text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} + f$. Montrer que g est un automorphisme et déterminer son application réciproque.