

Ex 6 :

1) a) Peu importe l'application f

S'il existe g $\neq$ 0 telle que g $\circ$ f = 0, f ne peut pas être bijective

$$0 = g \circ f \circ f^{-1} = g \circ Id = g$$

$$f^p = 0, f^{p-1} \neq 0$$

Si f est nilpotente, alors f^p=0, donc, si f était bijective, il existe f^{-1}, alors

$$0 = f^p \circ (f^{-1})^{p-1} = f$$

Or $f \neq 0$

1b) f^{p-1} $\neq$ 0, il existe x_0 tel que f^{p-1}(x_0) $\neq$ 0

$$\text{Soit, } \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}. \text{ Alors :}$$
$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \dots \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0$$

Alors en appliquant f

$$\lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f^2(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} f^p(x_0) = 0$$

Ou en appliquant f^{p-1}

$$\lambda_0 f^{p-1}(x_0) + \lambda_1 f^p(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} f^{2p-2}(x_0) = 0$$

Donc

$$\lambda_0 f^{p-1}(x_0) = 0$$

$$\text{Donc } \lambda_0 = 0$$

L'équation revient donc à

$$\lambda_1 f(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0$$

Soit en appliquant f^{p-2} :

$$\lambda_1 f^{p-1}(x_0) + \lambda_2 f^p(x_0) \dots + \lambda_{p-1} f^{2p-3}(x_0) = 0$$

$$\text{Donc on obtient de même } \lambda_1 = 0$$

De proche en proche tous les lambdas sont donc nuls. La famille est libre.

1.c) La famille (x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0)) est libre et contient p vecteurs. Si f^n(x_0) $\neq$ 0.

On aurait (x_0, f(x_0), ..., f^n(x_0)) famille libre à n + 1 vecteurs

Mais dim E = n. Une famille libre contient au plus n vecteurs

La famille ne peut pas être libre

Donc f^n(x_0)=0. Donc f^n=0.

2) rg(f)=dim(Im(f))=dim(Vect(f(e_1),...,f(e_n))). Si (e_1,...e_n) base de E.

Ici, en utilisant la question 1.b) et en utilisant n = p

(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)) est une famille libre avec n vecteurs = dim E

C' est donc une base de E

$$mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(f) = n - 1$$

$$3) f^p = 0. \text{ Donc } Id = Id^p - f^p$$

$$x^p - y^p = (x - y) \left(\sum_{k=0}^{p-1} x^k y^{p-1-k} \right)$$

$$\text{Donc } Id = (Id - f) \circ \left(\sum_{k=0}^{p-1} Id^{p-1-k} f^k \right) = (Id - f) \circ \left(\sum_{k=0}^{p-1} f^k \right)$$

Exercice 9

$$1) P = mat_B(B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1.b) rg(f_1, f_2, f_3, f_4) = rg P$$

$$\begin{aligned} rg P &= rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \\ L_4 - L_1 \end{matrix} \\ &= rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} L_3 - L_2 \\ L_4 + L_3 \end{matrix} \\ &= rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} L_4 + L_3 \end{matrix} \\ &= rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} L_4 \div (-2) \end{matrix} \\ &= rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} L_2 \div (-2) \end{matrix} \\ &= rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} L_1 - L_2 \end{matrix} \\ &= rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} L_3 \div (-1) \end{matrix} \\ &= rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} L_1 - (3/2)L_3 \\ L_2 + (1/2)L_3 \end{matrix} \\ &= rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} L_3 - L_4 \end{matrix} \\ &= rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc P est inversible. Donc B' est une base de R^4

$$2.a) PQ = 4I_4. \text{ Donc } P \times (1/4Q) = I_4. \text{ Donc } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{4}Q$$

$$b) mat_B(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ On cherche } mat_{B'}(x).$$

$$mat_{B'}(x) = mat_{B'}(B) mat_B(x) = P^{-1} mat_B(x) = \frac{1}{4} Q mat_B(x)$$

$$mat_{B'}(x) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } A = (a_{i,j}) \text{ et } B = (b_{i,j})$$

$$C = A \times B = (c_{i,j})$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

Démo 2.3.3

$$\text{Si } A = PBP^{-1}$$

$$Tr(A) = Tr((PB)P^{-1}) = Tr(P^{-1}(PB)) = Tr(InB) = Tr(B)$$

$$\uparrow$$
$$Tr(A/B) = Tr(A)$$

Ex 2.4.1

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 3x - y \\ 4x + y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -7y + 3z = 0 \\ -7y = 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y = \frac{3}{7}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7}z \\ y = \frac{3}{7}z \end{cases}$$

$$ker(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1/7 \\ 3/7 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$rg(A) = 3 - dim(ker(A)) = 3 - 1 = 2$$

$$Im(A) = Vect\left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$Im(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$