

Devoir maison 4 pour le 12/10/2026

Exercice 1 (Endomorphismes nilpotents en dimension finie).

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = I_4, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par (I, J, K, L) , et Id l'endomorphisme identité de E . On pose $A = J + K$.

1. Montrer que (I, J, K, L) est une base de E et donner la dimension de E .

Par définition (I, J, K, L) est génératrice de E . Montrons que cette famille est libre.

Soient pour cela : $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Alors :

$$aI + bJ + cK + dL = 0_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & -c \\ c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} = 0_4 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

Ainsi, la famille (I, J, K, L) est libre. C'est donc une base de E et $\dim(E) = 4$.

2. (a) Exprimer $J \times K$ et J^2 en fonction de I, J, K et L .

Un calcul nous donne $J \times K = L$ et $J^2 = -I$.

On admettra qu'on a également les égalités suivantes :

$$K \times L = J, \quad L \times J = K \text{ et } K^2 = L^2 = -I.$$

- (b) En déduire que $K \times J = -L$, $L \times K = -J$ et $J \times L = -K$.

Calculons :

$$K \times J = (L \times J) \times J = L \times J^2 = L \times (-I) = \boxed{-L}.$$

On montre en procédant de même que $L \times K = -J$ et $J \times L = -K$.

- (c) En déduire que E est stable pour le produit matriciel, c'est-à-dire que :

$$\forall (M, N) \in E^2, \quad M \times N \in E.$$

Soient $M, N \in E = \text{Vect}(I, J, K, L)$. Il existe (a, b, c, d) et (a', b', c', d') dans $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$M = aI + bJ + cK + dL \text{ et } N = a'I + b'J + c'K + d'L.$$

En développant le produit, $M \times N$ est combinaison linéaire de $I^2, J^2, K^2, L^2, IJ, IK, IL, JK, JL, KL$, donc combinaison linéaire de I, J, K, L d'après les questions 2.(a) et 2.(b). Ainsi $M \times N$ appartient au sous-espace E . E est bien stable par le produit matriciel.

3. Calculer A^2 . En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A .

On a $A^2 = (J + K)^2$. Mais puisque les matrices J et K ne commutent pas, on ne peut pas appliquer l'identité remarquable et on doit développer en distribuant :

$$A^2 = (J + K)(J + K) = J^2 + JK + KJ + K^2 = -I + L - L - I = -2I.$$

Ainsi :

$$A \times \left(-\frac{1}{2}A\right) = I$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{2}A$.

4. On considère maintenant l'application φ_A qui à toute matrice M de E associe :

$$\varphi_A(M) = AMA^{-1}.$$

- (a) Montrer que φ_A est un endomorphisme de E .

Commençons par remarquer que $A = J + K \in E$ et que $A^{-1} = -\frac{1}{2}A \in E$. Ainsi, si $M \in E$, par stabilité de E par produit matriciel :

$$\varphi_A(M) = AMA^{-1} \in E.$$

De plus, pour tous $(M, N) \in E^2$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N)A^{-1} \\ &= (\lambda AM + \mu AN)A^{-1} \\ &= \lambda AMA^{-1} + \mu AMA^{-1} \\ &= \lambda \varphi_A(M) + \mu \varphi_A(N).\end{aligned}$$

Donc φ_A est un endomorphisme de E .

- (b) Déterminer $\ker(\varphi_A)$, puis montrer que φ_A est un automorphisme de E .

Pour tout $M \in E$:

$$M \in \ker(\varphi_A) \Leftrightarrow AMA^{-1} = 0_4 \Leftrightarrow AM = 0_4 \times A = 0_4 \Leftrightarrow M = A^{-1}0_4 = 0_4.$$

Ainsi $\ker(\varphi_A) = \{0_4\}$, et φ_A est injective. Et puisque φ_A est un endomorphisme injectif de E qui est de dimension finie, φ_A est un automorphisme de E .

5. (a) Déterminer la matrice M_A de φ_A dans la base (I, J, K, L) .

En utilisant les résultats de la question 2. on obtient :

$$\varphi_A(I) = I, \quad \varphi_A(J) = K, \quad \varphi_A(K) = J, \quad \varphi_A(L) = -L$$

Ainsi :

$$\text{mat}_{\{I, J, K, L\}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (b) Déterminer une base des sous-espaces vectoriels $\ker(\varphi_A - Id)$ et $\ker(\varphi_A + Id)$.

On va travailler matriciellement en cherchant une base des sous-espaces $\ker(M_A - I_4)$ et $\ker(M_A + I_4)$.

Pour $\ker(M_A - I_4)$, calculons $M_A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

$$X \in \ker(M_A - I_4) \Leftrightarrow (M_A - I_4)X = 0_{4,1} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ -2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, $\ker(M_A - I_4) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Soit $\boxed{\ker(\varphi_A - Id) = \text{Vect}(I, J + K)}$.

Or la famille $(I, J + K)$ est libre car composée de deux matrices non colinéaires, ainsi $\boxed{(I, J + K) \text{ est une base de } \ker(\varphi_A - Id)}$

On procède de même pour $\ker(\varphi_A + Id)$. $M_A + I_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

$$X \in \ker(M_A + I_4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \\ t \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\ker(M_A + I_4) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Donc $\boxed{\ker(\varphi_A + Id) = \text{Vect}(J - K, L)}$. De plus $J - K$ et L ne sont pas colinéaires, la famille $(J - K, L)$ est donc libre. Ainsi $\boxed{(J - K, L) \text{ est une base de } \ker(\varphi_A + Id)}$.

(c) Montrer qu'il existe une base de A dans laquelle la matrice φ_A est $M_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrons que la famille $(I, J + K, J - K, L)$ est une base de E .

Pour cela, commençons par montrer qu'elle est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda_1 I + \lambda_2 (J + K) + \lambda_3 (J - K) + \lambda_4 L = 0 \Rightarrow \lambda_1 I + (\lambda_2 + \lambda_3)J + (\lambda_2 - \lambda_3)K + \lambda_4 L = 0$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(I, J, K, L) \text{ libre}}{\Rightarrow} \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \end{aligned}$$

La famille $(I, J + K, J - K, L)$ est donc bien libre, de cardinal $4 = \dim(E)$. Donc $(I, J + K, J - K, L)$ est bien une base de E .

Comme $I \in \ker(\varphi_A - Id)$, donc $(\varphi_A - Id)(I) = 0$, soit $\varphi_A(I) = I$.

De même pour $J + K$, $\varphi_A(J + K) = J + K$.

D'autre part, comme $J - K$ et $L \in \ker(\varphi_A + Id)$, on obtient de même

$$\varphi_A(J - K) = -(J - K) \text{ et } \varphi_A(L) = -L.$$

Ainsi la matrice de φ_A dans la base $(I, J + K, J - K, L)$ est donc :

$$\text{mat}_{\{I, J+K, J-K, L\}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$).

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On rappelle que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

A toute fonction f de E , on associe la fonction $T(f)$ où

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$$

1. (a) Soit $f \in E$. Prouver que la fonction $T(f)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $f \in E$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est continue sur

$[x, x+1]$, $T(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$ est donc bien définie.

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (f étant continue, cette primitive existe. Alors

$$T(f)(x) = F(x+1) - F(x)$$

Or par définition, F est une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $T(f)$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée et somme de fonctions qui le sont. $T(f)$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$.

Déterminer $(T(f))'(x)$ en fonction de f et de x .

De plus,

$$T(f)'(x) = 1 \times F'(x+1) - F'(x) = f(x+1) - f(x)$$

- (b) Soit f l'application telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2\pi x)$. Déterminer $T(f)$.

Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2\pi x)$. Alors

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_x^{x+1} \sin(2\pi t)dt \\ &= \left[-\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi} \right]_x^{x+1} \\ &= \frac{-\cos(2\pi(x+1))}{2\pi} + \frac{\cos(2\pi x)}{2\pi} \\ &= \frac{-\cos(2\pi + 2\pi) + \cos(2\pi x)}{2\pi} \\ &= \frac{-\cos(2\pi x) + \cos(2\pi x)}{2\pi} && \text{car } \cos \text{ est } 2\pi - \text{périodique} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, si $f(x) = \sin(2\pi x)$, alors :

$$T(f) = 0$$

2. (a) Justifier que T est un endomorphisme de E .

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_x^{x+1} (\lambda f + \mu g)(t)dt \\ &= \int_x^{x+1} \lambda f(t) + \mu g(t)dt && \text{par linéarité de l'évaluation en } t \\ &= \lambda \int_x^{x+1} f(t)dt + \mu \int_x^{x+1} g(t)dt && \text{par linéarité de l'intégration} \\ &= \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x) \\ &= (\lambda T(f) + \mu T(g))(x) \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda T(f) + \mu T(g))(x)$

Donc $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$. T est linéaire.

De plus on a vu que si $f \in E$ alors $T(f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset E$. Donc T est bien un endomorphisme de E .

(b) T est-il injectif? surjectif? Justifier.

On a vu en question 1.b que si $f(x) = \sin(2\pi x)$ alors $T(f) = 0$. Ainsi $\ker(f) \neq \{0\}$.

T n'est donc pas injective.

De plus, si $f \in E$, alors $T(f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, donc une fonction continue non $\mathcal{C}^1$ (par exemple $x \mapsto |x|$) n'a pas d'antécédent par T .

T n'est donc pas surjective.

3. Soit $F = \mathbb{R}_2[x]$. On rappelle que F est un sous-espace vectoriel de E .

(a) Justifier que F est stable par T .

Soit $P = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$, alors

$$\begin{aligned} T(P)(x) &= \int_x^{x+1} at^2 + bt + c dt \\ &= \left[\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} + ct \right]_x^{x+1} \\ &= a \frac{(x+1)^3}{3} + b \frac{(x+1)^2}{2} + c(x+1) - a \frac{x^3}{3} - b \frac{x^2}{2} - cx \\ &= a \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{3} + b \frac{x^2 + 2x + 1}{2} + c(x+1) - a \frac{x^3}{3} - b \frac{x^2}{2} - cx \\ &= a \frac{3x^2 + 3x + 1}{3} + b \frac{2x + 1}{2} + c \end{aligned}$$

Donc $T(P) \in \mathbb{R}_2[x]$. Et $\mathbb{R}_2[x]$ est stable par T .

(b) On note U la restriction de l'application T à F . Cette application U est alors un endomorphisme de F .

Déterminer la matrice de U dans la base canonique $\mathcal{C} = (f_0, f_1, f_2)$ où pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = x^k$.

En utilisant les calculs de la question précédente on trouve :

$$\begin{aligned} T(f_0)(x) &= 1 = f_0(x) \\ T(f_1)(x) &= \frac{2x+1}{2} = f_1(x) + \frac{1}{2}f_0(x) \\ T(f_2)(x) &= \frac{3x^2+3x+1}{3} = f_2(x) + f_1(x) + \frac{1}{3}f_0(x) \end{aligned}$$

Donc $U(f_0) = f_0$, $U(f_1) = f_1 + \frac{1}{2}f_0$ et $U(f_2) = f_2 + f_1 + \frac{1}{3}f_0$. La matrice de U dans la base $\mathcal{C}$ est donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(U) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) U est-il un automorphisme de F ?

La matrice de U dans la base $\mathcal{C}$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls, elle est donc inversible. U est donc bijective, c'est un automorphisme de F .