

Chapitre 9

Dérivabilité d'une fonction réelle d'une variable réelle

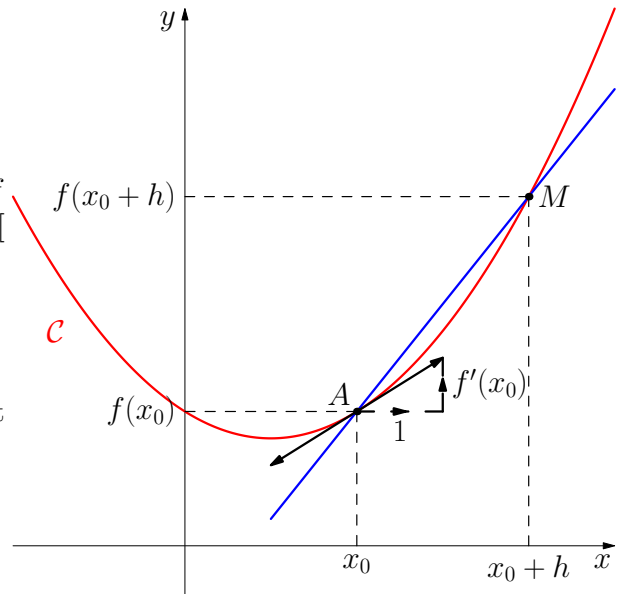
1 Définition de la dérivée

Définition 1.0.1.

On dit que la fonction f est **dérivable en** $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si il existe $\eta > 0$ tel que f soit définie sur l'intervalle ouvert $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ et :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \in \mathbb{R}$$

Le réel ℓ est le **nombre dérivé de f en x_0** et il se note $f'(x_0)$.



Exemple 1.0.1. Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ en $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.0.1. La fonction f est **dérivable en** x_0 , de dérivée $f'(x_0)$ si et seulement si **il existe** une fonction ϕ définie sur un voisinage de 0 telle que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + h\phi(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \phi(h) = 0.$$

Démonstration.

□

Théorème 1.0.2. Si f est dérivable en x_0 , la courbe représentative de f admet une **tangente** en $(x_0, f(x_0))$ d'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Exemple 1.0.2. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f(x) = \ln(x)$ en $x = 2$.

Proposition 1.0.3 (Dérivées usuelles).

$f(x)$	Domaine de définition	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
$n \geq 1, x^n$	$\mathbb{R}$	$n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$n \geq 1, \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Définition 1.0.2. Soit f définie sur $]x_0 - \eta, x_0]$ avec $\eta > 0$.

On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R}$$

On définit de même la dérivée à droite.

Notation 1.0.3. La dérivée à gauche est notée $f'_g(x_0)$ et la dérivée à droite $f'_d(x_0)$.

Exemple 1.0.3. 1. La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ admet-elle une dérivée à droite en $x_0 = 0$?

2. La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ admet-elle une dérivée à droite en $x_0 = 0$? Et à gauche?

Théorème 1.0.4. La fonction f est **dérivable en x_0** si et seulement si elle est **dérivable à droite et à gauche** et si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Dans ce cas, on a :

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

Exemple 1.0.4. La fonction $| \cdot |$ est-elle dérivable en $x_0 = 0$?

Définition 1.0.4. La fonction f est **dérivable sur un intervalle I** si et seulement si elle est **dérivable en tout point de I** et dans ce cas la **fonction dérivée f'** de f est la fonction qui à $x_0 \in I$ associe $f'(x_0)$.

2 Dérivabilité et continuité

Théorème 2.0.1. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .

Démonstration.

Exemple 2.0.1. Trouver un exemple illustrant que la réciproque est fausse.

Définition 2.0.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que la fonction $\mathbf{f}$ est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I .

Exemple 2.0.2. Justifier que f définie par $f(x) = x^2 + 3x + 7$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

3 Opérations sur les dérivées

3.1 Opérations algébriques

Théorème 3.1.1. Soit I un intervalle Si u et v sont dérivables (resp de classe $\mathcal{C}^1$) sur I :

- $u + v$ est dérivable (resp de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et, $\forall x \in I$, $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$,
- $u \times v$ est dérivable (resp de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et, $\forall x \in I$, $(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$,
- si $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$, $\frac{u}{v}$ est dérivable (resp de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et, $\forall x \in I$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$$

Exemple 3.1.1. Préciser l'intervalle de dérivabilité et calculer les dérivées suivantes :

1. $f(x) = x^2 \ln(x) + 4(x + 2)^3$

2. $g(x) = \frac{2x + 1}{\ln(x)}$

3.2 Dérivée d'une composée

Théorème 3.2.1. Soit I un intervalle, si f est dérivable (resp $\mathcal{C}^1$) sur I et si g est dérivable (resp $\mathcal{C}^1$) sur $f(I)$, la fonction $g \circ f$ est dérivable (resp $\mathcal{C}^1$) sur I et, $\forall x \in I$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) g'(f(x))$$

Exemple 3.2.1. Donner les domaines de dérivabilité et calculer les dérivées suivantes :

1. $f(x) = e^{2x^2+3x}$

2. $g(x) = \ln(2 \cos(x) + 3x)$

3. $h(x) = \sqrt{\sin(x)}$

4. $i(x) = (2x + 4 \ln(x))^4$

3.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 3.3.1. Soit un intervalle I . Soit f dérivable (resp $\mathcal{C}^1$) sur I telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ et bijective de I dans J .

La fonction réciproque de f , f^{-1} , est dérivable (resp $\mathcal{C}^1$) sur J et pour tout $y = f(x) \in J$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Proposition 3.3.2. La dérivée de la fonction arctan est $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Démonstration.

□

3.4 Prolongement de la dérivée

Théorème 3.4.1. (Théorème du prolongement de la dérivée.)

Soit I un intervalle et a un point de I . Si f est une fonction continue sur I , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$), alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et on a $f'(a) = \ell$.

Remarque 3.4.1. Si a est une extrémité de I , on remplace $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell$ par $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \ell$ ou par $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = \ell$

Exemple 3.4.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On continuera de noter f son prolongement.

2. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exemple 3.4.2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

1. Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en 0.

2. La nouvelle fonction g est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

4 Théorème de Rolle

4.1 Extremum local

Définition 4.1.1. La fonction f définie sur I admet un **maximum local** (respectivement un minimum local) en $x_0 \in I$ si et seulement il existe un intervalle ouvert J centré en x_0 tel que $J \subset I$ et :

$$\forall x \in J, f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

Exemple 4.1.1. La fonction $f(x) = x^3 - 3x$ admet-elle un maximum local en $x_0 = -1$?

Théorème 4.1.1. Si f est dérivable en x_0 et si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Exemple 4.1.2. Illustrer le théorème précédent.

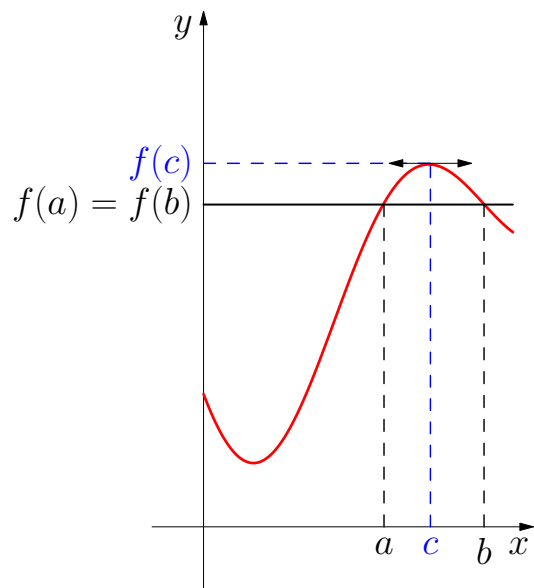
Remarque 4.1.1. La réciproque est fausse.

Exemple 4.1.3. Donner un contre-exemple à la réciproque.

4.2 Théorème de Rolle

Théorème 4.2.1 (Théorème de Rolle).

Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$ et **dérivable** sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
Alors **il existe** $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Exemple 4.2.1. Soit $n \geq 2$ et u et v deux réels. Montrer que l'équation

$$x^{2n} + ux + v = 0,$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet au plus deux solutions.

5 Théorème des accroissements finis et applications

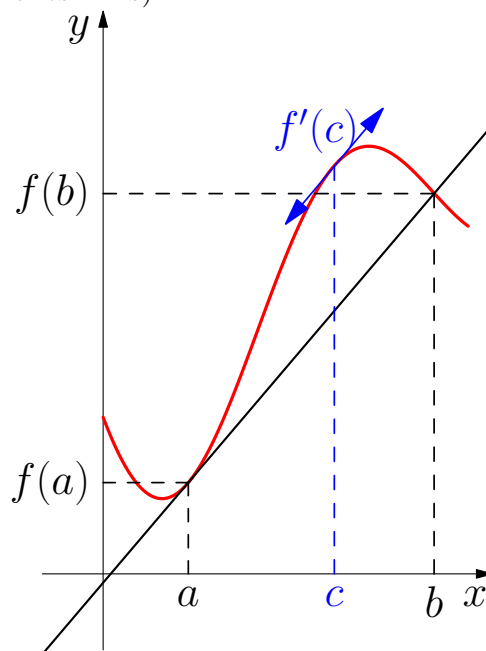
5.1 Théorème des accroissements finis

Théorème 5.1.1 (Théorème des accroissements finis).

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Remarque 5.1.1. Une autre formulation est possible :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0, 1[, f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h)$$

5.2 Inégalité des accroissements finis

Théorème 5.2.1. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors

$$\forall t \in]a, b[, m \leq f'(t) \leq M \Rightarrow m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

ou encore :

$$\forall t \in]a, b[, |f'(t)| \leq M \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

ou encore, sous les mêmes hypothèses :

$$\forall t \in]a, b[, |f'(t)| \leq M \Rightarrow \forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$$

Exemple 5.2.1. On considère la fonction f de $I = [3, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{6 + x}$. Montrer que

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{6}|x - y|.$$