

Devoir maison 3 pour le

Exercice 1.

Partie I : Préliminaires

On considère un ensemble E non vide que l'on partage en deux sous-ensembles, nommés A et B . On note n_1 le cardinal de A et n_2 le cardinal de B . Soit $n \leq \min(n_1, n_2)$ On choisit au hasard un sous-ensemble M de E , de cardinal n . On note alors X la variable aléatoire égale au nombre d'éléments de A présents dans M .

1. (a) Déterminer $X(\Omega)$

On a $n \leq \min(n_1, n_2)$. Donc $n \leq n_1$ et $n \leq n_2$. Ainsi les n éléments peuvent être tous pris dans A ou tous pris dans B ou bien être un mélange des deux. Ainsi $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

- (b) Justifier que : $\forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}$.

On dira que X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, n_1, n_2)$.

L'évènement $X = k$ correspond à on a pris une partie de E contenant n éléments dont k éléments viennent de A .

On a :

- au total $\binom{n_1+n_2}{n}$ parties de E contenant n éléments (nombre de parties contenant n éléments d'un ensemble à $n_1 + n_2$ éléments) ;
- pour faire une partie à n éléments dont k proviennent de l'ensemble A il faut choisir
 - une partie à k éléments de $A \rightarrow \binom{n_1}{k}$ possibilités ;
 - une partie à $n - k$ éléments de B (le complément) $\rightarrow \binom{n_2}{n-k}$ possibilités

Ainsi
$$P(X = k) = \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}.$$

- (c) En déduire la formule, dite de Vandermonde : $\sum_{k=0}^n \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}$.

L'ensemble d'évènements $(X = k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forme un système complet d'évènements ainsi :

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$$

Soit

$$1 = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}} = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}$$

Et donc :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}$$

2. Montrer que $E(X) = n \frac{n_1}{n_1 + n_2}$

X étant une variable aléatoire finie elle admet nécessairement une espérance et

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=0}^n k P(X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n k \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}} \\
 &= \frac{1}{\binom{n_1+n_2}{n}} \sum_{k=0}^n k \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k} \\
 &= \frac{1}{\binom{n_1+n_2}{n}} \sum_{k=1}^n k \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k} \\
 &= \frac{1}{\binom{n_1+n_2}{n}} \sum_{k=1}^n n_1 \binom{n_1-1}{k-1} \binom{n_2}{n-k} && \text{par la formule } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \\
 &= \frac{n_1}{\binom{n_1+n_2}{n}} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n_1-1}{l} \binom{n_2}{n-l-1} && \text{par changement d'indice } l = k-1 \\
 &= \frac{n_1}{\binom{n_1+n_2}{n}} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n_1-1}{l} \binom{n_2}{n-1-l} \\
 &= \frac{n_1}{\binom{n_1+n_2}{n}} \binom{n_1-1+n_2}{n-1} && \text{par la formule de Vandermonde} \\
 &= \frac{n_1 \times n! (n_1 + n_2 - n)!}{(n_1 + n_2)!} \frac{(n_1 + n_2 - 1)!}{(n-1)! ((n_1 + n_2 - 1) - (n-1))!} \\
 &= n_1 \times \frac{n!}{(n-1)!} \times \frac{(n_1 + n_2 - n)!}{(n_1 + n_2 - n)!} \times \frac{(n_1 + n_2 - 1)!}{(n_1 + n_2)!} \\
 &= n_1 \times n \times 1 \times \frac{1}{n_1 + n_2} \\
 &= n \frac{n_1}{n_1 + n_2}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$E(X) = n \frac{n_1}{n_1 + n_2}$$

3. Calcul de la variance de X .

- (a) Montrer que X admet une variance.

Comme X est une variable aléatoire finie, elle admet nécessairement une variance.

- (b) Calculer $E(X(X-1))$.

Comme X est une variable aléatoire finie, par le théorème de transfert $X(X-1)$ admet une

espérance et

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^n k(k-1)P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^n k(k-1) \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}} \\
&= \frac{1}{\binom{n_1+n_2}{n}} \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k} \\
&= \frac{1}{\binom{n_1+n_2}{n}} \sum_{k=2}^n n_1(n_1-1) \binom{n_1-2}{k-2} \binom{n_2}{n-k} \\
&\text{par la formule } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \text{ appliquée 2 fois} \\
&= \frac{n_1(n_1-1)}{\binom{n_1+n_2}{n}} \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n_1-2}{l} \binom{n_2}{n-l-2} \\
&= \frac{n_1(n_1-1)}{\binom{n_1+n_2}{n}} \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n_1-2}{l} \binom{n_2}{n-2-l} \\
&= \frac{n_1(n_1-1)}{\binom{n_1+n_2}{n}} \binom{n_1-2+n_2}{n-2} \\
&= \frac{n_1(n_1-1)n!(n_1+n_2-n)!}{(n_1+n_2)!} \frac{(n_1+n_2-2)!}{(n-2)!(n_1+n_2-2-n+2)!} \\
&= n_1(n_1-1) \frac{n!}{(n-2)!} \frac{(n_1+n_2-n)!}{(n_1+n_2-n)!} \frac{(n_1+n_2-2)!}{(n_1+n_2)!} \\
&= \frac{n_1(n_1-1)n(n-1)}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$E(X(X-1)) = \frac{n_1(n_1-1)n(n-1)}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}$$

(c) En déduire les valeurs de $E(X^2)$, puis de $V(X)$.

Alors $E(X^2) = E(X^2 - X + X) = E(X(X-1)) + E(X)$ par linéarité de l'espérance. Donc

$$E(X^2) = \frac{n_1(n_1-1)n(n-1)}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)} + \frac{nn_1}{n_1+n_2} = nn_1 \frac{n(n-1) + n_1 + n_2 - 1}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}$$

Et donc par la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= nn_1 \frac{n(n-1) + n_1 + n_2 - 1}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)} - \frac{n^2 n_1^2}{(n_1+n_2)^2} \\
&= nn_1 \frac{(nn_1 - n + n_2)(n_1+n_2) - nn_1(n_1+n_2-1)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)} \\
&= nn_1 \frac{nn_1^2 + nn_1n_2 - nn_1 - nn_2 + n_1n_2 + n_2^2 - nn_1^2 - nn_1n_2 + nn_1}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)} \\
&= nn_1n_2 \frac{n_1+n_2-n}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}
\end{aligned}$$

Donc

$$V(X) = nn_1n_2 \frac{n_1 + n_2 - n}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}$$

Partie II : Tirages dans une urne

Une urne contient n boules blanches et n boules noires ($n \geq 1$). A chaque étape, on ajoute n boules noires, puis on extrait n boules au hasard (que l'on ne remet pas dans l'urne) parmi les $3n$ boules que se trouvent alors dans l'urne. On note X_i la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la i -ème étape.

3. Donner la loi de X_1 ainsi que son espérance.

Commençons par étudier la variable Y_1 désignant le nombre de boules blanches extraites au premier tirage. On reconnaît alors la situation de la partie 1. En effet, l'ensemble E est ici l'urne avec ses $3n$ boules, A est le sous-ensemble de E formé des n boules blanches et B est celui des $2n$ boules noires. Ainsi, Y_1 suit la loi $\mathcal{H}(n, n, 2n) : \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(Y_1 = i) = \frac{\binom{n}{i} \binom{2n}{n-i}}{\binom{3n}{n}}$.

On a $X_1 + Y_1 = n$ (le nombre de boules blanches restantes ajouté au nombre de boules blanches extraites est égal au nombre de boules tirées) et $X_1(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

On en déduit : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P(X_1 = k) = P(Y_1 = n - k) = \frac{\binom{n}{n-k} \binom{2n}{k}}{\binom{3n}{n}}.$$

On remarque alors que, selon la notation X_1 suit la loi $\mathcal{H}(n, 2n, n)$, ce qui implique :

$$E(X_1) = n \frac{2n}{2n + n} = \frac{2n}{3}$$

4. Soit i un entier naturel non nul, j et k deux entiers naturels tels que $k \leq j$.

- (a) Calculer $P_{X_i=j}(X_{i+1} = k)$.

La réalisation de l'évènement $(X_i = j)$ signifie qu'après la i -ème étape, il reste j boules blanches dans l'urne. Sachant que $(X_i = j)$ est réalisé, $(X_{i+1} = k)$ est réalisé si et seulement si l'on extrait $j - k$ boules blanches et $n - j + k$ boules noires de l'urne, ceci sans remise, lors du $(i + 1)$ -ème tirage. Le processus est encore une fois celui de la partie 1 (E désigne toujours l'urne, contenant $3n$ boules, A est toujours le sous-ensemble de E formé des boules blanches, mais cette fois il y en a j , et B est toujours le sous-ensemble des boules noires et il y en a cette fois $3n - j$). On a donc

$$P_{(X_i=j)}(X_{i+1} = k) = \frac{\binom{j}{j-k} \binom{3n-j}{n-j+k}}{\binom{3n}{n}}.$$

- (b) Reconnaitre la loi de X_{i+1} conditionnellement à l'évènement $(X_i = j)$, puis donner la valeur de $E(X_{i+1} | [X_i = j])$.

La symétrie des coefficients binomiaux permet d'obtenir : $P_{(X_i=j)}(X_{i+1} = k) = \frac{\binom{j}{k} \binom{3n-j}{2n-k}}{\binom{3n}{2n}}$

et on reconnaît que la loi de X_{i+1} conditionnellement à l'évènement $(X_i = j)$ est la loi $\mathcal{H}(2n, j, 3n - j)$. On en déduit directement :

$$E(X_{i+1} | [X_i = j]) = 2n \times \frac{j}{3n} = \frac{2j}{3}$$

(c) Déterminer finalement $E(X_i)$.

La variable X_i étant de support fini ($X_i(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$), X_i admet bien une espérance.

De plus d'après la formule de l'espérance totale appliquée avec le système complet d'évènement $(X_i = j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, on a :

$$E(X_{i+1}) = \sum_{j=0}^n E(X_{i+1} | [X_i = j]) P(X_i = j) = \sum_{j=0}^n \frac{2j}{3} P(X_i = j).$$

Soit, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $E(X_{i+1}) = \frac{2}{3} E(X_i)$. La suite $(E(X_i))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $E(X_1) = \frac{2}{3}n$. On en conclut :

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*, E(X_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \frac{2}{3}n = \left(\frac{2}{3}\right)^i n.}$$