Réduction des matrices

ECG2 - mathématiques appliquées

Rappel de cours

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres. Un réel λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur colonne $X \neq 0$ tel que $\boxed{AX = \lambda X}$. Un tel vecteur est appelé vecteur propre associé à λ.

Sous-espace propre associé à λ : $\boxed{E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)}$

Pour le déterminer, résoudre $(A - \lambda I_n)X = 0$, puis donner une base des solutions.

Cas particuliers. Pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont les coefficients diagonaux.

Pour une matrice d'ordre 2 **uniquement**, on peut utiliser λ valeur propre $\iff \det(A - \lambda I_2) = 0$.

2. Valeur propre nulle et inversibilité. A inversible $\iff$ 0 n'est pas valeur propre de A.

3. Polynôme annulateur et recherche des valeurs propres. Un polynôme non nul Q est annulateur de A si $Q(A) = 0$.

Les racines réelles de Q sont des valeurs propres **potentielles** : vérifier pour chacune que $\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$.

4. Matrice diagonalisable. A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

Cela équivaut à l'existence d'une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A. Les colonnes de P sont ces vecteurs propres ; les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres correspondantes, **dans le même ordre**.

$$\boxed{A \text{ diagonalisable} \iff \text{somme des dim des sous-esp propres} = n}.$$

5. Matrices symétriques. Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

1. Applications

Exercice 1 **Une matrice d'ordre 2**

On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre.
3. La matrice A est-elle inversible ?
4. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Correction.

1. L'ordre est 2 : $\det(A - \lambda I_2) = (2-\lambda)^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$. Les valeurs propres sont donc 1 et 3.
2. $(A - I_2)X = 0 \iff x + y = 0$ et $(A - 3I_2)X = 0 \iff x = y$. Ainsi $E_1 = \text{Vect}((1,-1))$ et $E_3 = \text{Vect}((1,1))$. Chaque vecteur indiqué est non nul et constitue une base du sous-espace correspondant.
3. 0 n'est pas valeur propre : A est inversible.
4. Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont libres. On peut prendre

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $AP = PD$, donc $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2 **Une matrice triangulaire**

On considère

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les valeurs propres de B.
2. Justifier, avant tout calcul des sous-espaces propres, que B est diagonalisable.
3. Déterminer une base de chaque sous-espace propre.
4. Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $B = PDP^{-1}$.

Correction.

1. B est triangulaire : ses valeurs propres sont $1, 2, 3$.
2. Elle est d'ordre 3 et possède trois valeurs propres réelles distinctes : elle est diagonalisable.
3. Pour $X = (x, y, z)$, on résout successivement :
$$\begin{aligned}(B - I_3)X = 0 &\iff y = z = 0,\\ (B - 2I_3)X = 0 &\iff x = y,\ z = 0,\\ (B - 3I_3)X = 0 &\iff x = y = 0.\end{aligned}$$
D'où les bases $((1,0,0))$, $((1,1,0))$ et $((0,0,1))$, respectivement.
4. On prend $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(1,2,3)$. Les colonnes de P forment une base propre, donc P est inversible et $B = PDP^{-1}$.

Exercice 3 Une valeur propre répétée

On considère
$$C = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

1. Donner les valeurs propres de C.
2. Déterminer une base et la dimension de chaque sous-espace propre.
3. La matrice C est-elle diagonalisable ?
4. La matrice C est-elle inversible ?

Correction.

1. Par lecture de la diagonale, les valeurs propres sont 2 et -1.
2. $(C - 2I_3)X = 0 \iff y = z = 0$: $E_2 = \mathrm{Vect}((1,0,0))$. De même, $(C + I_3)X = 0 \iff x = y = 0$: $E_{-1} = \mathrm{Vect}((0,0,1))$. Chaque sous-espace a dimension 1.
3. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $2 < 3$: C n'est pas diagonalisable.
4. 0 n'est pas valeur propre : C est inversible.

Exercice 4 Un polynôme annulateur

On considère
$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad Q(x) = x(x-1)(x-2).$$

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que Q est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire les valeurs propres potentielles de A.
3. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre.
4. Justifier que A est diagonalisable et donner une diagonalisation de A.

Correction.

1. Les produits matriciels donnent
$$A^2 = \begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix}4 & 4 & 7\\ 4 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
Or $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, donc $Q(A) = A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.
2. Toute valeur propre est une racine réelle de Q : les candidates sont $0, 1, 2$.
3. On résout les trois systèmes :
$$\begin{aligned}AX = 0 &\iff z = 0,\ x + y = 0,\\ (A - I_3)X = 0 &\iff x = y = -z,\\ (A - 2I_3)X = 0 &\iff z = 0,\ x = y.\end{aligned}$$
Ainsi $E_0 = \mathrm{Vect}((1,-1,0))$, $E_1 = \mathrm{Vect}((-1,-1,1))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((1,1,0))$. Ces trois noyaux étant non triviaux, $0, 1, 2$ sont effectivement valeurs propres.

4. Les trois valeurs propres sont distinctes. On prend

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \mathrm{diag}(0,1,2).$$

Les colonnes de P sont trois vecteurs propres indépendants : P est inversible, $AP = PD$, donc $A = PDP^{-1}$.

Exercice 5 Valeurs propres potentielles

On considère

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier, sans déterminer les valeurs propres, que J est diagonalisable.
2. Calculer J^2.
3. Vérifier que $Q(x) = x(x-1)(x-3)$ est un polynôme annulateur de J. En déduire les valeurs propres potentielles.
4. Déterminer les valeurs propres de J et une base de chaque sous-espace propre.
5. Toutes les racines réelles d'un polynôme annulateur sont-elles nécessairement des valeurs propres ?

Correction.

1. J est réelle symétrique, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Tous les coefficients de J^2 valent 3 : $J^2 = 3J$, puis $J^3 = 9J$.
3. $Q(J) = J^3 - 4J^2 + 3J = 9J - 12J + 3J = 0$. Les valeurs propres potentielles sont $0, 1, 3$.
4. $JX = 0 \iff x+y+z = 0$, donc $E_0 = \mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,-1))$; la famille est libre par identification des coordonnées. Si $JX = 3X$, alors $x = y = z$, donc $E_3 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. Enfin, $JX = X$ impose $x = y = z = s = x+y+z = 3s$, donc $s = 0$ et $X = 0$. Ainsi 1 n'est pas valeur propre. Le spectre est exactement $\{0, 3\}$.
5. Non : ici 1 est une racine réelle de Q, mais n'est pas valeur propre de J.

Exercice 6 Puissances par diagonalisation

On reprend $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ de l'exercice 1.

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Déterminer la matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Exprimer D^n pour tout entier $n \geq 0$.
4. En déduire une expression explicite des coefficients de A^n.
5. Vérifier la formule pour $n = 0$ et $n = 1$.

Correction.

1. $P^2 = 2I_2$, donc $P^{-1} = P/2$.
2. Les colonnes de P sont propres pour 3 et 1 : $D = \mathrm{diag}(3,1)$.
3. Pour $n \geq 0$, $D^n = \mathrm{diag}(3^n, 1)$.
4. On utilise $A^n = PD^nP^{-1}$ puis on multiplie :

$$\boxed{A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}}.$$

5. Pour $n = 0$, on obtient I_2 ; pour $n = 1$, on retrouve A.

2. Problèmes

Problème 1 Une suite récurrente d'ordre trois

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$.

Partie A – Réduction de la matrice

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que le polynôme $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ est un polynôme annulateur de A.
2. Factoriser Q et en déduire les valeurs propres potentielles de A.
3. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre.
4. Justifier que A est diagonalisable. Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Partie B – Expression de la suite

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

5. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$, puis exprimer X_n en fonction de A^n et de X_0.
6. En utilisant la diagonalisation de A, montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que $u_n = \alpha + \beta\, 2^n + \gamma\, 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Déterminer α, β, γ lorsque $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 4$.

Partie C – Étude et sommation

On conserve les conditions initiales de la question 7.

8. Étudier le signe de u_n, les variations de (u_n) et sa limite.
9. Donner un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.
10. Calculer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$.
11. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{4^n}$ converge et calculer sa somme.

Correction.

Partie A

1. On obtient
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \\ 36 & -60 & 25 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 36 & -60 & 25 \\ 150 & -239 & 90 \end{pmatrix}.$$
La substitution donne $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0$: Q est annulateur.
2. $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$: les candidates sont 1, 2 et 3.
3. Pour une candidate λ, les deux premières équations de $AX = \lambda X$ imposent $y = \lambda x$, $z = \lambda^2 x$. La troisième devient $(6 - 11\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3)x = 0$, vérifiée puisque $Q(\lambda) = 0$. Donc $E_\lambda = \mathrm{Vect}((1, \lambda, \lambda^2))$. Ainsi les bases sont $((1,1,1))$, $((1,2,4))$ et $((1,3,9))$.
4. Les trois valeurs propres sont réelles distinctes, donc A est diagonalisable. On prend
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \mathrm{diag}(1,2,3), \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Partie B

5. La définition de X_n et la récurrence donnent $X_{n+1} = AX_n$. Par récurrence, $X_n = A^n X_0$.
6. Écrivons $P^{-1}X_0 = (\alpha, \beta, \gamma)^t$. Alors $X_n = PD^n(\alpha, \beta, \gamma)^t$. La première ligne de P étant $(1,1,1)$, on obtient $u_n = \alpha + \beta 2^n + \gamma 3^n$.
7. Les trois conditions initiales donnent
$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1, \quad \alpha + 4\beta + 9\gamma = 4.$$
Les différences donnent $\beta + 2\gamma = 1$ et $2\beta + 6\gamma = 3$. D'où $\gamma = 1/2$, $\beta = 0$ et $\alpha = -1/2$. Ainsi $\boxed{u_n = (3^n - 1)/2}$.

Partie C

8. $u_0 = 0$ et $u_n > 0$ pour $n \geq 1$. De plus $u_{n+1} - u_n = 3^n > 0$: la suite est strictement croissante et tend vers $+\infty$.
9. $u_n / (3^n/2) = 1 - 3^{-n} \to 1$, donc $u_n \sim 3^n/2$.
10. Par sommation géométrique,
$$S_N = \frac{1}{2}\left(\frac{3^{N+1} - 1}{2} - (N+1)\right) = \boxed{\frac{3^{N+1} - 2N - 3}{4}}.$$

11. $u_n/4^n = \frac{1}{2}((3/4)^n - (1/4)^n)$. Les deux séries géométriques convergent, donc la série converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{4^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-3/4} - \frac{1}{1-1/4}\right) = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

Problème 2 emlyon 2023 – Exercice 2 intégral

Concours BCE, mathématiques appliquées, exercice 2 : « Deux systèmes différentiels ».

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I – Réduction de la matrice A

1. a) Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?
   b) Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.
   c) Donner une base de E_2.
   d) Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?
2. a) Dans cette sous-question M est une matrice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?
   b) En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.
3. Donner une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

Partie II – Un système différentiel

On considère le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} x' = 3x + y + z, \\ y' = x + 3y + z, \\ z' = x + y + 3z, \end{cases}$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S).
5. a) Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?
   b) Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Partie III – Un second système différentiel

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B.
7. La matrice B est-elle diagonalisable ?
8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.
   a) Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?
   c) Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.
9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x' = -x - 4y, \\ y' = x + 3y, \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Correction.
Partie I

1. a) $A - 2I_3 = J$, où tous les coefficients de J valent 1. Les trois colonnes sont égales et non nulles : le rang vaut 1.
   b) Par la formule du rang, $\dim\ker(A-2I_3) = 3-1 = 2$. Le noyau n'est donc pas réduit à zéro : 2 est valeur propre et $\dim E_2 = 2$.
   c) $(A-2I_3)X = 0 \iff x+y+z = 0$, donc $E_2 = \mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,-1))$. Ces vecteurs sont libres (leurs deuxième et troisième coordonnées isolent les coefficients) : ils forment une base.
   d) Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. E_2 occupe déjà deux dimensions sur trois : il peut y avoir au plus une autre valeur propre.
2. a) Si $M = (m_{ij})$, la i-ième coordonnée de MU vaut $m_{i1}+m_{i2}+m_{i3}$: c'est la somme des coefficients de la ligne i.
   b) Chaque ligne de A a pour somme 5, donc $AU = 5U$. Comme $U \neq 0$, 5 est valeur propre. C'est la seule autre valeur propre possible, et son sous-espace a dimension au plus 1. Ainsi $E_5 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.
3. Les bases de E_2 et de E_5 réunies donnent trois vecteurs propres libres. Ainsi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \mathrm{diag}(2,2,5)$$

   conviennent. En effet P est inversible et $AP = PD$, donc $A = PDP^{-1}$.

Partie II

4. Posons $X = (x,y,z)^t$ et $Y = P^{-1}X$. Alors $X' = AX \iff Y' = DY$. En notant $Y = (u,v,w)^t$, on obtient $u' = 2u$, $v' = 2v$, $w' = 5w$. Donc $u(t) = ae^{2t}$, $v(t) = be^{2t}$, $w(t) = ce^{5t}$, avec $a,b,c \in \mathbb{R}$. Puisque $X = PY$, toutes les solutions sont

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = (a+b)e^{2t} + ce^{5t}, \\ y(t) = -ae^{2t} + ce^{5t}, \\ z(t) = -be^{2t} + ce^{5t}, \end{cases} \quad a,b,c \in \mathbb{R}.}$$

5. a) Le théorème d'existence et d'unicité pour un système différentiel linéaire à coefficients constants assure une unique solution sur $\mathbb{R}$ pour toute condition initiale fixée.
   b) À $t = 0$, les équations sont $a+b+c = 1$, $-a+c = -1$ et $-b+c = 0$. La somme donne $3c = 0$, donc $c = 0$, puis $a = 1$, $b = 0$. Ainsi $\boxed{X_0(t) = e^{2t}(1,-1,0)^t}$.

Partie III

6. L'ordre est 2 : $\det(B-\lambda I_2) = (-1-\lambda)(3-\lambda)+4 = (\lambda-1)^2$. L'unique valeur propre est donc 1.
7. $(B-I_2)X = 0 \iff x+2y = 0$, donc $E_1(B) = \mathrm{Vect}((2,-1))$ a dimension 1. Comme il n'existe pas de base propre de $\mathbb{R}^2$, B n'est pas diagonalisable.
8. a) Si $av_1 + bv_2 = 0$, les coordonnées donnent $-a = 0$, puis $2a - b = 0$, donc $a = b = 0$. La famille est libre à deux éléments dans $\mathbb{R}^2$: c'est une base.
   b) $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = (1,-1) = v_1 + v_2$. Les colonnes de T sont leurs coordonnées dans β, donc $\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.
   c) La matrice de passage $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ convient. Elle est inversible car ses colonnes forment une base, et $BQ = QT$ implique $B = QTQ^{-1}$.
9. Posons $X = (x,y)^t = QY$, avec $Y = (u,v)^t$. Alors $X' = BX \iff Y' = TY$, soit $v' = v$ et $u' = u+v$. On obtient $v(t) = c_2e^t$. Pour $u' - u = c_2e^t$, l'homogène donne c_1e^t et une particulière est c_2te^t. Donc $u(t) = (c_1+c_2t)e^t$. En revenant à $X = QY$, toutes les solutions sont

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \big(2c_1 + (2t-1)c_2\big)e^t, \\ y(t) = -(c_1+c_2t)e^t, \end{cases} \quad c_1,c_2 \in \mathbb{R}.}$$

Problème 3 Évolution d'un système à trois états

Un système peut se trouver dans trois états A, B et C. À chaque étape, son nouvel état dépend uniquement de son état actuel, selon les probabilités suivantes :

État actuel / état suivant	A	B	C
A	$1/2$	$1/3$	$1/6$
B	$1/3$	$1/3$	$1/3$
C	$1/6$	$1/3$	$1/2$

On pose $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie A – Étude de la matrice

1. Justifier que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer M^2, puis vérifier que $3M^3 - 4M^2 + M = 0$.
3. En déduire les valeurs propres potentielles de M.
4. Déterminer les valeurs propres de M et une base de chaque sous-espace propre.
5. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$.
6. En déduire une expression explicite de M^n pour tout entier $n \geq 1$. Déterminer la limite de chacun de ses coefficients lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B – Étude probabiliste

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le système se trouve respectivement dans les états A, B et C à l'étape n. On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

7. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $U_{n+1} = MU_n$. En déduire U_n en fonction de M^n et de U_0.
8. On suppose que le système se trouve initialement dans l'état A. Déterminer a_n, b_n et c_n pour tout $n \geq 1$.
9. Étudier les limites de ces trois suites et interpréter les résultats.
10. On revient à une distribution initiale quelconque. Montrer que les limites de a_n, b_n et c_n ne dépendent pas de cette distribution.

Correction.
Partie A

1. M est réelle et symétrique : elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Par produit matriciel,
$$M^2 = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \qquad M^3 = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 19 & 18 & 17 \\ 18 & 18 & 18 \\ 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$
En mettant au même dénominateur, on vérifie $3M^3 - 4M^2 + M = 0$.
3. Le polynôme $3x^3 - 4x^2 + x = x(x-1)(3x-1)$ annule M. Les valeurs propres potentielles sont 0, 1 et $1/3$.
4. En résolvant les systèmes associés (ou en vérifiant les vecteurs suivants), on obtient
$$E_1 = \mathrm{Vect}((1,1,1)),$$
$$E_{1/3} = \mathrm{Vect}((1,0,-1)),$$
$$E_0 = \mathrm{Vect}((1,-2,1)).$$
En effet, $MX = X$ impose $x = y = z$; $MX = X/3$ impose $y = 0$ et $z = -x$; $MX = 0$ impose $z = x$ et $y = -2x$. Les trois noyaux sont non triviaux : les trois valeurs sont bien propres.
5. On choisit les trois vecteurs propres dans cet ordre :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \mathrm{diag}(1, 1/3, 0), \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$
P est inversible car ses colonnes sont propres pour trois valeurs distinctes. On a $MP = PD$.

6. Pour $n \geq 1$, $D^n = \mathrm{diag}(1, 3^{-n}, 0)$, d'où

$$\boxed{M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} + \frac{3^{-n}}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}}.$$

Comme $3^{-n} \to 0$, chaque coefficient tend vers $1/3$.

Partie B

7. La formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{3}b_n + \tfrac{1}{6}c_n,\\ b_{n+1} &= \tfrac{1}{3}a_n + \tfrac{1}{3}b_n + \tfrac{1}{3}c_n,\\ c_{n+1} &= \tfrac{1}{6}a_n + \tfrac{1}{3}b_n + \tfrac{1}{2}c_n. \end{aligned}$$

Ces égalités équivalent à $U_{n+1} = MU_n$. Par récurrence, $U_n = M^n U_0$ pour tout $n \geq 0$.

8. Avec $U_0 = (1,0,0)^t$, U_n est la première colonne de M^n. Pour $n \geq 1$,

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3} + \frac{3^{-n}}{2}, \qquad b_n = \frac{1}{3}, \qquad c_n = \frac{1}{3} - \frac{3^{-n}}{2}}.$$

9. Les trois probabilités tendent vers $1/3$: à long terme, les trois états sont équiprobables.

10. Pour une distribution initiale (a_0, b_0, c_0), on utilise $a_0 + b_0 + c_0 = 1$:

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{3^{-n}}{2}(a_0 - c_0), \quad b_n = \frac{1}{3}, \quad c_n = \frac{1}{3} - \frac{3^{-n}}{2}(a_0 - c_0) \qquad (n \geq 1).$$

Le terme dépendant de la distribution initiale tend vers zéro : les trois limites restent $1/3$.