Réduction des matrices

ECG2 - mathématiques appliquées

Rappel de cours

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres. Un réel λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur colonne $X \neq 0$ tel que $\boxed{AX = \lambda X}$. Un tel vecteur est appelé vecteur propre associé à λ.

Sous-espace propre associé à λ : $\boxed{E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)}$

Pour le déterminer, résoudre $(A - \lambda I_n)X = 0$, puis donner une base des solutions.

Cas particuliers. Pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont les coefficients diagonaux.

Pour une matrice d'ordre 2 **uniquement**, on peut utiliser λ valeur propre $\iff \det(A - \lambda I_2) = 0$.

2. Valeur propre nulle et inversibilité. A inversible $\iff$ 0 n'est pas valeur propre de A.

3. Polynôme annulateur et recherche des valeurs propres. Un polynôme non nul Q est annulateur de A si $Q(A) = 0$.

Les racines réelles de Q sont des valeurs propres **potentielles** : vérifier pour chacune que $\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$.

4. Matrice diagonalisable. A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

Cela équivaut à l'existence d'une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A. Les colonnes de P sont ces vecteurs propres ; les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres correspondantes, **dans le même ordre**.

$$\boxed{A \text{ diagonalisable} \iff \text{somme des dim des sous-esp propres} = n}.$$

5. Matrices symétriques. Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

1. Applications

Exercice 1 Une matrice d'ordre 2

On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre.
3. La matrice A est-elle inversible ?
4. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2 Une matrice triangulaire

On considère

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les valeurs propres de B.
2. Justifier, avant tout calcul des sous-espaces propres, que B est diagonalisable.
3. Déterminer une base de chaque sous-espace propre.
4. Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $B = PDP^{-1}$.

Exercice 3 Une valeur propre répétée

On considère

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les valeurs propres de C.
2. Déterminer une base et la dimension de chaque sous-espace propre.
3. La matrice C est-elle diagonalisable ?
4. La matrice C est-elle inversible ?

Exercice 4 Un polynôme annulateur

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = x(x-1)(x-2).$$

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que Q est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire les valeurs propres potentielles de A.
3. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre.
4. Justifier que A est diagonalisable et donner une diagonalisation de A.

Exercice 5 Valeurs propres potentielles

On considère

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier, sans déterminer les valeurs propres, que J est diagonalisable.
2. Calculer J^2.
3. Vérifier que $Q(x) = x(x-1)(x-3)$ est un polynôme annulateur de J. En déduire les valeurs propres potentielles.
4. Déterminer les valeurs propres de J et une base de chaque sous-espace propre.
5. Toutes les racines réelles d'un polynôme annulateur sont-elles nécessairement des valeurs propres ?

Exercice 6 Puissances par diagonalisation

On reprend $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ de l'exercice 1.

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Déterminer la matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Exprimer D^n pour tout entier $n \geq 0$.
4. En déduire une expression explicite des coefficients de A^n.
5. Vérifier la formule pour $n = 0$ et $n = 1$.

2. Problèmes

Problème 1 Une suite récurrente d'ordre trois

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$.

Partie A – Réduction de la matrice

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que le polynôme $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ est un polynôme annulateur de A.
2. Factoriser Q et en déduire les valeurs propres potentielles de A.
3. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre.
4. Justifier que A est diagonalisable. Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Partie B – Expression de la suite

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

5. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$, puis exprimer X_n en fonction de A^n et de X_0.
6. En utilisant la diagonalisation de A, montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que $u_n = \alpha + \beta\, 2^n + \gamma\, 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Déterminer α, β, γ lorsque $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 4$.

Partie C – Étude et sommation

On conserve les conditions initiales de la question 7.

8. Étudier le signe de u_n, les variations de (u_n) et sa limite.
9. Donner un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.
10. Calculer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$.
11. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{4^n}$ converge et calculer sa somme.

Problème 2 **emlyon 2023 – Exercice 2 intégral**

Concours BCE, mathématiques appliquées, exercice 2 : « Deux systèmes différentiels ».

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I – Réduction de la matrice A

1. a) Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?
   b) Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.
   c) Donner une base de E_2.
   d) Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?
2. a) Dans cette sous-question M est une matrice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?
   b) En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.
3. Donner une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

Partie II – Un système différentiel

On considère le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} x' = 3x + y + z, \\ y' = x + 3y + z, \\ z' = x + y + 3z, \end{cases}$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S).
5. a) Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?
   b) Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Partie III – Un second système différentiel

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B.
7. La matrice B est-elle diagonalisable ?
8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.
   a) Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b) Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?
   c) Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.
9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x' = -x - 4y, \\ y' = x + 3y, \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Problème 3 Évolution d'un système à trois états

Un système peut se trouver dans trois états A, B et C. À chaque étape, son nouvel état dépend uniquement de son état actuel, selon les probabilités suivantes :

État actuel / état suivant	A	B	C
A	$1/2$	$1/3$	$1/6$
B	$1/3$	$1/3$	$1/3$
C	$1/6$	$1/3$	$1/2$

On pose $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie A – Étude de la matrice

1. Justifier que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer M^2, puis vérifier que $3M^3 - 4M^2 + M = 0$.
3. En déduire les valeurs propres potentielles de M.
4. Déterminer les valeurs propres de M et une base de chaque sous-espace propre.
5. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$.
6. En déduire une expression explicite de M^n pour tout entier $n \geq 1$. Déterminer la limite de chacun de ses coefficients lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B – Étude probabiliste

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le système se trouve respectivement dans les états A, B et C à l'étape n. On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

7. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $U_{n+1} = MU_n$. En déduire U_n en fonction de M^n et de U_0.
8. On suppose que le système se trouve initialement dans l'état A. Déterminer a_n, b_n et c_n pour tout $n \geq 1$.
9. Étudier les limites de ces trois suites et interpréter les résultats.
10. On revient à une distribution initiale quelconque. Montrer que les limites de a_n, b_n et c_n ne dépendent pas de cette distribution.