Autour du point fixe

ECG2 - mathématiques approfondies

1. Exercices d'application

Exercice 1 Existence et unicité

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Éléments de correction.
Posons $h(x) = e^{-x} - x$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$. Elle est strictement décroissante, de limite $+\infty$ en $-\infty$ et $-\infty$ en $+\infty$: elle s'annule une seule fois.
Comme $h(1/2) > 0$ et $h(1) < 0$, on obtient $\boxed{1/2 < \alpha < 1}$.

Exercice 2 Un intervalle stable

On considère $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$ et la suite définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, puis préciser ses ensembles de continuité et de dérivabilité.
2. Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
4. Montrer que $f([1,2]) \subset [1,2]$.
5. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1,2]$.
6. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
7. Étudier la monotonie de (u_n), puis montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

Éléments de correction.

1. $D_f = [-2, +\infty[$. La fonction est continue sur D_f et dérivable sur $]-2, +\infty[$. Elle n'est pas dérivable en -2 : le taux d'accroissement à droite tend vers $+\infty$.
2. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $[-2, +\infty[$, de $f(-2) = 0$ vers $+\infty$.
3. $f(x) = x$ impose $x \geq 0$, puis $x^2 = x + 2$. Les racines sont -1 et 2 ; seul $\boxed{2}$ convient.
4. $f([1,2]) = [\sqrt{3}, 2] \subset [1,2]$.
5. Sur $[1,2]$, $f(x) \geq x$ équivaut à $2 + x \geq x^2$, soit $(2-x)(x+1) \geq 0$. L'inégalité est stricte pour $x < 2$.
6. $u_0 \in [1,2]$; la stabilité de cet intervalle donne par récurrence l'existence de tous les termes et leur appartenance à $[1,2]$.
7. $f(u_n) \geq u_n$: la suite est croissante et majorée par 2. Par continuité, sa limite est un point fixe dans $[1,2]$: $\boxed{u_n \to 2}$.

Exercice 3 Une estimation de l'erreur

On considère $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et la suite définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

On pose $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations de f sur I et montrer que $f(I) \subset I$.
3. Résoudre $f(x) = x$ et montrer que f possède un unique point fixe α dans I.
4. Montrer que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
5. En déduire que, pour tous $x, y \in I$,
$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9}|x - y|.$$
6. Montrer que la suite est bien définie et que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Établir $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$, puis montrer que
$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |1 - \alpha|.$$
En déduire la convergence de (u_n).

Éléments de correction.

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$.
2. f est strictement décroissante sur I ; $f(I) = [1/2, 2/3] \subset I$.
3. $f(x) = x \iff x^2 + x - 1 = 0$. Les solutions sont $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Seule $\boxed{\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ appartient à I.
4. Pour $x \in I$, $1 + x \geq 3/2$, donc $|f'(x)| \leq (3/2)^{-2} = 4/9$.
5. L'inégalité des accroissements finis appliquée sur I donne l'inégalité demandée.
6. La stabilité de I et $u_0 = 1 \in I$ permettent de conclure par récurrence.
7. Appliquer la question 5 à u_n et α, avec $f(\alpha) = \alpha$. Par récurrence,
$$|u_n - \alpha| \leq (4/9)^n |1 - \alpha|.$$
Comme $0 < 4/9 < 1$, $\boxed{u_n \to \alpha}$.

Exercice 4 L'hypothèse de continuité

On définit $f : [0,1] \to [0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer u_n, puis sa limite ℓ.

2. La limite ℓ est-elle un point fixe de f ?
3. Expliquer pourquoi cet exemple ne contredit pas le résultat habituel concernant la limite d'une suite récurrente.

Éléments de correction.
Par récurrence, $\boxed{u_n = 2^{-n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $\ell = 0$, mais $f(0) = 1 \neq 0$: la limite n'est pas un point fixe.
La fonction n'est pas continue en 0, car $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq f(0)$. L'hypothèse de continuité au point limite manque.

2. Problèmes

Problème 1 Approximation d'une racine carrée

Soit $a > 0$. On considère la fonction

$$f : x \in]0, +\infty[\longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

et, pour un réel $u_0 > 0$, la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A – Étude de la convergence

1. Déterminer les points fixes de f.
2. Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$f(x) - \sqrt{a} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x}.$$
En déduire que la suite est bien définie et que $u_n \geq \sqrt{a}$ pour tout $n \geq 1$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
5. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Partie B – Vitesse de convergence

6. Montrer que, pour tout $x \geq \sqrt{a}$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.
7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
$$0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq \frac{u_1 - \sqrt{a}}{2^{n-1}}.$$
8. On pose $e_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$. Établir
$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2(1 + e_n)}.$$
En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq e_{n+1} \leq \frac{1}{2}e_n^2$.
9. Dans cette question, $a = 2$ et $u_0 = 2$. Montrer que $e_1 < 1$, puis établir
$$e_n \leq 2^{\,1-2^{n-1}} \qquad (n \geq 1).$$
Donner un rang à partir duquel cette majoration garantit $e_n \leq 10^{-10}$.

Partie C – Informatique

10. Écrire une fonction Python `racine(a, eps)` qui part de $u_0 = \max(1, a)$ et renvoie un terme u_n vérifiant
$$|u_n - \sqrt{a}| \leq \texttt{eps}.$$
Le critère d'arrêt devra être justifié et ne devra pas utiliser une valeur approchée préalable de $\sqrt{a}$.

Éléments de correction.
Partie A.

1. $f(x) = x \iff x^2 = a$. Sur $]0, +\infty[$, l'unique point fixe est $\boxed{\sqrt{a}}$.
2. $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - a/x^2)$. La fonction décroît sur $]0, \sqrt{a}]$, puis croît sur $[\sqrt{a}, +\infty[$. Son minimum vaut $\sqrt{a}$; ses limites en 0^+ et $+\infty$ valent $+\infty$.
3. Réduire $\frac{1}{2}(x + a/x) - \sqrt{a}$ au même dénominateur. On obtient $f(x) \geq \sqrt{a} > 0$ pour tout $x > 0$. Une récurrence donne

l'existence de la suite et $u_n \geq \sqrt{a}$ pour $n \geq 1$.

4. Pour $n \geq 1$,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{a - u_n^2}{2u_n} \leq 0.$$
5. La suite est décroissante à partir du rang 1 et minorée par $\sqrt{a}$. Sa limite $\ell \geq \sqrt{a} > 0$ vérifie, par continuité, $\ell = f(\ell)$, donc $\boxed{u_n \to \sqrt{a}}$.

Partie B.

6. Pour $x \geq \sqrt{a}$, $0 < a/x^2 \leq 1$, donc $0 \leq f'(x) \leq 1/2$.
7. L'inégalité des accroissements finis entre u_n et $\sqrt{a}$ donne
$$0 \leq u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \tfrac{1}{2}(u_n - \sqrt{a}) \quad (n \geq 1).$$
Itérer cette inégalité à partir du rang 1.
8. Dans l'identité de la question 3, remplacer u_n par $\sqrt{a}(1 + e_n)$:
$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2(1 + e_n)}.$$
Pour $n \geq 1$, $e_n \geq 0$, d'où $0 \leq e_{n+1} \leq e_n^2/2$.
9. $u_1 = 3/2$ et $e_1 = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} - 1 \in [0, 1[$. La borne est vraie au rang 1. Si elle est vraie au rang n, alors
$$e_{n+1} \leq \tfrac{1}{2}\left(2^{1-2^{n-1}}\right)^2 = 2^{1-2^n}.$$
Le rang $\boxed{n = 7}$ convient, puisque $2^{1-64} = 2^{-63} < 10^{-10}$. La borne au rang 6 vaut $2^{-31} > 10^{-10}$.

Partie C.

10. On suppose eps > 0. Le choix $u_0 = \max(1, a)$ assure $u_0 \geq \sqrt{a}$, puis $u_n \geq \sqrt{a}$ pour tout n. Ainsi
$$0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq u_n - a/u_n.$$
Le membre de droite tend vers 0 ; le programme termine et renvoie une valeur à la précision demandée.

```
def racine(a, eps):
  u = max(1.0, a)
  while u - a/u > eps:
    u = 0.5 * (u + a/u)
  return u
```

Problème 2 EDHEC 2024 – Mathématiques approfondies

Dans cet exercice, E est un espace euclidien tel que $\dim E \geq 2$ et p désigne un entier naturel non nul et strictement inférieur à $\dim E$. Le produit scalaire des vecteurs a et b de E est noté $\langle a, b\rangle$ et la norme du vecteur a est notée $\|a\|$. On considère p réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, tous différents de 0, ainsi qu'une famille orthonormale $(u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de E, et enfin on pose $U = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. On se propose d'étudier l'application f qui, à tout vecteur x de E, associe
$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x\rangle u_i.$$

Partie 1 : Étude de f

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Caractériser f lorsque $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont tous égaux à 1.

On revient au cas général pour toute la suite.

3. a. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et préciser sa dimension en fonction de $\dim E$ et p.
   b. En déduire le rang de f puis déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
4. Montrer que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont valeurs propres de f et donner un vecteur propre associé à chacune d'entre elles.

Partie 2 : Convergence d'une suite de vecteurs de E

5. On dit qu'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge vers le vecteur y de E lorsque $\lim_{n\to+\infty} \|y_n - y\| = 0$. Montrer que le vecteur y est unique.

On pose $K = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2}$ et on suppose que K est strictement inférieur à 1.

6. Calculer $\|f(x)\|^2$ pour tout x de E et en déduire que l'on a $\|f(x)\| \leq K\|x\|$.
7. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E définie par la donnée du vecteur x_0 et par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, valable pour tout entier naturel n.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $\|x_n\| \leq K^n\|x_0\|$.
   b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Vers quel vecteur ?
   c. Donner la nature de la série $\sum_n \|x_n\|$.

Éléments de correction.
Partie 1. On note $d = \dim E$.

1. La linéarité découle de celle du produit scalaire en la seconde variable. Pour $x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i\langle u_i, x\rangle\langle u_i, y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. Ainsi f est un endomorphisme symétrique.
2. Lorsque tous les λ_i valent 1, f est le projecteur orthogonal sur U.
3. Par orthonormalité, $\langle u_j, f(x)\rangle = \lambda_j\langle u_j, x\rangle$. Les λ_j étant non nuls, $f(x) = 0 \iff \forall j,\ \langle u_j, x\rangle = 0$. Donc $\boxed{\operatorname{Ker} f = U^\perp, \quad \dim \operatorname{Ker} f = d - p}$. Le théorème du rang donne $\operatorname{rg} f = p$. Comme $\operatorname{Im} f \subset U$ et $\dim U = p$, $\boxed{\operatorname{Im} f = U}$.
4. Pour tout j, $f(u_j) = \lambda_j u_j$ et $u_j \neq 0$. Ainsi λ_j est valeur propre, avec vecteur propre u_j.

Partie 2.

5. Si (y_n) converge vers y et z, alors $\|y - z\| \leq \|y - y_n\| + \|y_n - z\| \to 0$. Par conséquent $y = z$.
6. Par orthonormalité, puis par Cauchy-Schwarz,
$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2\langle u_i, x\rangle^2 \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i^2\|x\|^2 = K^2\|x\|^2.$$
Prendre la racine carrée.
7. La question 6 donne $\|x_{n+1}\| \leq K\|x_n\|$. Par récurrence, $\|x_n\| \leq K^n\|x_0\|$. Comme $0 < K < 1$, $\boxed{x_n \to 0_E}$. Par comparaison à la série géométrique de raison K, $\boxed{\sum_n \|x_n\| \text{ converge}}$.

Problème 3 — Un point fixe dans un espace euclidien

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel et de la norme associée. On considère

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad F(X) = AX + b.$$

Partie A – Étude de la matrice

1. Justifier que A est diagonalisable dans une base orthonormale.
2. Déterminer ses valeurs propres et une base orthonormale de vecteurs propres.
3. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, $\|AX\| \leq \frac{1}{2}\|X\|$.
4. En déduire que, pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^3$,
$$\|F(X) - F(Y)\| \leq \frac{1}{2}\|X - Y\|.$$

Partie B – Recherche du point fixe

5. Montrer que $I_3 - A$ est inversible.
6. En déduire que F possède un unique point fixe L, puis calculer ses coordonnées.
7. Retrouver l'unicité du point fixe en utilisant uniquement l'inégalité de la question 4.

Partie C – Une méthode d'approximation

Pour un vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^3$, on définit $X_{n+1} = F(X_n)$.

8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n - L = A^n(X_0 - L)$.
9. Établir
$$\|X_n - L\| \leq \frac{1}{2^n}\|X_0 - L\|,$$
puis en déduire la convergence de (X_n).

10. Montrer que $\|X_n - L\| \leq 2\,\|X_{n+1} - X_n\|$.
11. On prend désormais $X_0 = 0$. Déterminer explicitement les trois coordonnées de X_n en fonction de n.
12. Écrire une fonction Python utilisant NumPy qui renvoie une approximation de L à une précision eps donnée pour la norme euclidienne. Justifier le critère d'arrêt.

Éléments de correction.
Partie A.

1. A est réelle symétrique : le théorème spectral s'applique.
2. Une base orthonormale de vecteurs propres est

$$v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \quad v_3 = (0,0,1),$$

associée respectivement à $\boxed{1/2,\ 1/4,\ -1/4}$.

3. Si $X = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, alors
$$\|AX\|^2 = \tfrac{1}{4}\alpha^2 + \tfrac{1}{16}\beta^2 + \tfrac{1}{16}\gamma^2 \leq \tfrac{1}{4}\,\|X\|^2 .$$
4. $F(X) - F(Y) = A(X - Y)$: appliquer la question 3.

Partie B.

5. Les valeurs propres de $I_3 - A$ sont $1/2$, $3/4$ et $5/4$, toutes non nulles. Cette matrice est donc inversible.
6. $F(L) = L \iff (I_3 - A)L = b$ possède une unique solution. Le système est $5x - y = 8$, $-x + 5y = 0$, $5z = 4$, d'où
$$\boxed{L = (5/3,\ 1/3,\ 4/5)}.$$
7. Si L et L' sont deux points fixes, $\|L - L'\| \leq \frac{1}{2}\,\|L - L'\|$, donc $L = L'$.

Partie C.

8. $X_{n+1} - L = A(X_n - L)$; conclure par récurrence.
9. Par la question 3, $\|X_{n+1} - L\| \leq \frac{1}{2}\,\|X_n - L\|$. Itérer pour obtenir la borne demandée, qui tend vers 0. Ainsi $\boxed{X_n \to L}$.
10. L'inégalité triangulaire donne
$$\|X_n - L\| \leq \|X_n - X_{n+1}\| + \|X_{n+1} - L\| \leq \|X_n - X_{n+1}\| + \tfrac{1}{2}\,\|X_n - L\| .$$
En regroupant, on obtient l'inégalité demandée.
11. Pour $X_0 = 0$, $X_n = L - A^n L$. On décompose $L = \sqrt{2}v_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}v_2 + \frac{4}{5}v_3$. D'où
$$\boxed{X_n = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} - (\frac{1}{2})^n - \frac{2}{3}(\frac{1}{4})^n \\ \frac{1}{3} - (\frac{1}{2})^n + \frac{2}{3}(\frac{1}{4})^n \\ \frac{4}{5}\left(1 - (-\frac{1}{4})^n\right) \end{pmatrix}}.$$
12. Pour eps > 0, le programme suivant utilise la question 10. Il renvoie X_n lorsque $2\,\|X_{n+1} - X_n\| \leq$ eps, ce qui garantit la précision. Le test finit par être satisfait puisque $X_n \to L$.

```
import numpy as np
def point_fixe(eps):
  A = np.array([[3,1,0],[1,3,0],[0,0,-2]]) / 8
  b = np.array([1.0, 0.0, 1.0])
  x = np.zeros(3)
  y = A @ x + b
  while 2 * np.linalg.norm(y - x) > eps:
    x = y
    y = A @ x + b
  return x
```