Autour du point fixe

ECG2 - mathématiques approfondies

1. Exercices d'application

Exercice 1 Existence et unicité

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Exercice 2 Un intervalle stable

On considère $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$ et la suite définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, puis préciser ses ensembles de continuité et de dérivabilité.
2. Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
4. Montrer que $f([1,2]) \subset [1,2]$.
5. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1,2]$.
6. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
7. Étudier la monotonie de (u_n), puis montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 Une estimation de l'erreur

On considère $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et la suite définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

On pose $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations de f sur I et montrer que $f(I) \subset I$.
3. Résoudre $f(x) = x$ et montrer que f possède un unique point fixe α dans I.
4. Montrer que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
5. En déduire que, pour tous $x, y \in I$,
$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9}|x - y|.$$
6. Montrer que la suite est bien définie et que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Établir $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$, puis montrer que
$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |1 - \alpha|.$$
En déduire la convergence de (u_n).

Exercice 4 L'hypothèse de continuité

On définit $f : [0,1] \to [0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer u_n, puis sa limite ℓ.
2. La limite ℓ est-elle un point fixe de f ?
3. Expliquer pourquoi cet exemple ne contredit pas le résultat habituel concernant la limite d'une suite récurrente.

2. Problèmes

Problème 1 Approximation d'une racine carrée

Soit $a > 0$. On considère la fonction

$$f : x \in]0, +\infty[\longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

et, pour un réel $u_0 > 0$, la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A – Étude de la convergence

1. Déterminer les points fixes de f.
2. Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$f(x) - \sqrt{a} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x}.$$
En déduire que la suite est bien définie et que $u_n \geq \sqrt{a}$ pour tout $n \geq 1$.
4. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

5. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Partie B – Vitesse de convergence

6. Montrer que, pour tout $x \geq \sqrt{a}$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.
7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
$$0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq \frac{u_1 - \sqrt{a}}{2^{n-1}}.$$
8. On pose $e_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$. Établir
$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2(1+e_n)}.$$
En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq e_{n+1} \leq \frac{1}{2}e_n^2$.
9. Dans cette question, $a = 2$ et $u_0 = 2$. Montrer que $e_1 < 1$, puis établir
$$e_n \leq 2^{\,1-2^{n-1}} \qquad (n \geq 1).$$
Donner un rang à partir duquel cette majoration garantit $e_n \leq 10^{-10}$.

Partie C – Informatique

10. Écrire une fonction Python `racine(a, eps)` qui part de $u_0 = \max(1, a)$ et renvoie un terme u_n vérifiant
$$|u_n - \sqrt{a}| \leq \texttt{eps}.$$
Le critère d'arrêt devra être justifié et ne devra pas utiliser une valeur approchée préalable de $\sqrt{a}$.

Problème 2 EDHEC 2024 – Mathématiques approfondies

Dans cet exercice, E est un espace euclidien tel que $\dim E \geq 2$ et p désigne un entier naturel non nul et strictement inférieur à $\dim E$. Le produit scalaire des vecteurs a et b de E est noté $\langle a, b\rangle$ et la norme du vecteur a est notée $\|a\|$. On considère p réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, tous différents de 0, ainsi qu'une famille orthonormale $(u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de E, et enfin on pose $U = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. On se propose d'étudier l'application f qui, à tout vecteur x de E, associe
$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x\rangle u_i.$$

Partie 1 : Étude de f

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Caractériser f lorsque $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont tous égaux à 1.

On revient au cas général pour toute la suite.

3. a. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et préciser sa dimension en fonction de $\dim E$ et p.
   b. En déduire le rang de f puis déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
4. Montrer que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont valeurs propres de f et donner un vecteur propre associé à chacune d'entre elles.

Partie 2 : Convergence d'une suite de vecteurs de E

5. On dit qu'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge vers le vecteur y de E lorsque $\lim_{n\to+\infty} \|y_n - y\| = 0$. Montrer que le vecteur y est unique.

On pose $K = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2}$ et on suppose que K est strictement inférieur à 1.

6. Calculer $\|f(x)\|^2$ pour tout x de E et en déduire que l'on a $\|f(x)\| \leq K\|x\|$.
7. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E définie par la donnée du vecteur x_0 et par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, valable pour tout entier naturel n.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $\|x_n\| \leq K^n\|x_0\|$.
   b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Vers quel vecteur ?
   c. Donner la nature de la série $\sum_n \|x_n\|$.

Problème 3 **Un point fixe dans un espace euclidien**

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel et de la norme associée. On considère

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad F(X) = AX + b.$$

Partie A – Étude de la matrice

1. Justifier que A est diagonalisable dans une base orthonormale.
2. Déterminer ses valeurs propres et une base orthonormale de vecteurs propres.
3. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, $\|AX\| \leq \frac{1}{2}\|X\|$.
4. En déduire que, pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^3$,

$$\|F(X) - F(Y)\| \leq \frac{1}{2}\|X - Y\|.$$

Partie B – Recherche du point fixe

5. Montrer que $I_3 - A$ est inversible.
6. En déduire que F possède un unique point fixe L, puis calculer ses coordonnées.
7. Retrouver l'unicité du point fixe en utilisant uniquement l'inégalité de la question 4.

Partie C – Une méthode d'approximation

Pour un vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^3$, on définit $X_{n+1} = F(X_n)$.

8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n - L = A^n(X_0 - L)$.
9. Établir

$$\|X_n - L\| \leq \frac{1}{2^n}\|X_0 - L\|,$$

   puis en déduire la convergence de (X_n).
10. Montrer que $\|X_n - L\| \leq 2\|X_{n+1} - X_n\|$.
11. On prend désormais $X_0 = 0$. Déterminer explicitement les trois coordonnées de X_n en fonction de n.
12. Écrire une fonction Python utilisant NumPy qui renvoie une approximation de L à une précision eps donnée pour la norme euclidienne. Justifier le critère d'arrêt.