Valeurs propres et sous-espaces propres

ECG2 - mathématiques approfondies

Rappel de méthode

On travaille sur $\mathbb{R}$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff A - \lambda I_n \text{ non inversible} \iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}.}$$

1. Rechercher les valeurs propres.

a. **Polynôme annulateur.** Vérifier $P(A) = 0$. Toute valeur propre est une racine réelle de P. Tester ces racines : elles sont seulement **potentielles**.

b. **À vue.** Deux lignes égales dans $A - aI_n$ impliquent sa non-inversibilité : a est valeur propre. Autre piste : calculer AU avec $U = (1, \dots, 1)^t$. Si $AU = sU$, alors s est valeur propre.

c. **Ordre 2.** Résoudre $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

d. **Étude directe.** Résoudre $(A - \lambda I_n)X = 0$ selon λ, ou étudier les pivots. **Isoler les valeurs qui annulent un pivot avant de diviser.**

Pour une matrice triangulaire, lire les valeurs propres sur la diagonale. Pas de déterminant au-delà de l'ordre 2 ici.

2. Déterminer les sous-espaces propres. Pour chaque valeur propre λ, résoudre $(A - \lambda I_n)X = 0$ et paramétrer les solutions pour écrire

$$\begin{aligned} E_\lambda(A) &= \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \\ &= \mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_p). \end{aligned}$$

Vérifier que les générateurs sont libres pour donner une base et la dimension.

Le sous-espace propre contient 0 ; un **vecteur propre est non nul**.

1. Exercices d'application

Consigne commune. Pour chaque matrice, déterminer toutes les valeurs propres réelles, puis donner une base et la dimension de chaque sous-espace propre. Les questions précisent la méthode de recherche à utiliser.

Exercice 1 — Un polynôme annulateur

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$, puis montrer que $P(X) = (X - 2)^2(X + 1)$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire les valeurs propres potentielles de A, puis déterminer le spectre et les sous-espaces propres.

Éléments de correction.

1. On obtient
$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$
Le produit de cette matrice par $A + I_3$ est nul : $P(A) = 0$.
2. $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 2\}$. Pour $V = (x, y, z)^t$,
$$(A - 2I_3)V = 0 \iff y = z = 0,$$
$$(A + I_3)V = 0 \iff y = -3x,\ z = 9x.$$
Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}}$ et
$$E_2(A) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0)^t),$$
$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}((1, -3, 9)^t).$$
Chaque espace est de dimension 1 : le vecteur qui l'engendre est non nul et forme une base.

Exercice 2 — Deux observations à vue

On considère

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Observer les lignes de $B - I_3$. En déduire une valeur propre de B.
2. Calculer BU. En déduire une autre valeur propre.
3. Pour $V = (x, y, z)^t$, poser $s = x + y + z$ et exprimer BV à l'aide de V et de U. En déduire que les valeurs propres précédentes sont les seules, puis déterminer leurs sous-espaces propres.

Éléments de correction.

1. Les trois lignes de $B - I_3$ sont égales : cette matrice n'est pas inversible. Donc 1 est valeur propre.
2. $BU = 4U$ avec $U \neq 0$: 4 est valeur propre.
3. $BV = V + sU$. Si $BV = \lambda V$, alors $(\lambda - 1)V = sU$. Pour $\lambda \neq 1$, V est colinéaire à U ; si $V \neq 0$, on a donc $\lambda = 4$.
$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{1, 4\}}.$$
$$E_1(B) = \{(x, y, z)^t : x + y + z = 0\}$$
$$= \mathrm{Vect}((1, -1, 0)^t, (1, 0, -1)^t),$$
$$E_4(B) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1)^t).$$
Les deux premiers vecteurs sont libres, d'où $\dim E_1(B) = 2$; $\dim E_4(B) = 1$.

Exercice 3 — Un déterminant d'ordre 2

On considère

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser $\det(C - \lambda I_2)$. En déduire les valeurs propres de C.
2. Déterminer les sous-espaces propres associés.

Éléments de correction.

1. $\det(C-\lambda I_2) = (2-\lambda)(3-\lambda)-2 = (\lambda-1)(\lambda-4)$. Donc $\boxed{\mathrm{Sp}(C) = \{1,4\}}$.
2. $(C-I_2)(x,y)^t = 0 \iff y = -x$ et $(C-4I_2)(x,y)^t = 0 \iff y = 2x$.
$$E_1(C) = \mathrm{Vect}((1,-1)^t),$$
$$E_4(C) = \mathrm{Vect}((1,2)^t).$$
Chacun de ces espaces est de dimension 1 ; le vecteur indiqué en forme une base.

Exercice 4 Une étude directe en fonction de λ

On considère
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, écrire le système $(D-\lambda I_3)(x,y,z)^t = 0$.
2. En utilisant la première équation pour éliminer y, déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le système possède une solution non nulle. On n'utilisera pas de déterminant d'ordre 3.
3. Déterminer les sous-espaces propres de D.

Éléments de correction.
Le système équivaut à
$$y = \lambda x, \quad (2-\lambda)(\lambda+1)x = 0, \quad x + (2-\lambda)z = 0.$$
Si $\lambda \notin \{-1,2\}$, il donne $x = y = z = 0$: $D - \lambda I_3$ est inversible.
Pour $\lambda = 2$, on a $x = y = 0$, z libre. Pour $\lambda = -1$, on a $y = -x$ et $z = -x/3$.
$$\boxed{\mathrm{Sp}(D) = \{-1,2\}},$$
$$E_2(D) = \mathrm{Vect}((0,0,1)^t),$$
$$E_{-1}(D) = \mathrm{Vect}((3,-3,-1)^t).$$
Ces espaces sont de dimension 1 ; les vecteurs indiqués en forment des bases.

Exercice 5 Une racine qui n'est pas valeur propre

On considère
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $(E-I_3)^2(E-2I_3) = 0$.
2. En déduire que $Q(X) = (X+1)(X-1)^2(X-2)$ est un polynôme annulateur de E. Quelles sont les valeurs propres potentielles obtenues avec Q ?
3. Montrer que -1 n'est pas valeur propre de E.
4. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de E.

Éléments de correction.
$(E-I_3)^2 = \mathrm{diag}(0,0,1)$, puis $(E-I_3)^2(E-2I_3) = 0$.
Par multiplication par $E+I_3$, $Q(E) = 0$.
Les racines de Q donnent $\mathrm{Sp}(E) \subset \{-1,1,2\}$. Or $E+I_3$ est triangulaire, de diagonale $(2,2,3)$: elle est inversible, donc $-1 \notin \mathrm{Sp}(E)$.
$(E-I_3)(x,y,z)^t = 0 \iff y = z = 0$, et $(E-2I_3)(x,y,z)^t = 0 \iff x = y = 0$. Ainsi
$$\boxed{\mathrm{Sp}(E) = \{1,2\}},$$
$$E_1(E) = \mathrm{Vect}((1,0,0)^t), \qquad E_2(E) = \mathrm{Vect}((0,0,1)^t).$$
Les deux espaces sont de dimension 1. Une racine d'un polynôme annulateur n'est donc pas nécessairement une valeur propre.

Exercice 6 Sur un espace de polynômes

On considère l'application
$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], \qquad f(P) = (X+1)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme et déterminer sa matrice M dans la base canonique $(1, X, X^2)$.
2. Déterminer les valeurs propres de f en observant M.
3. Pour chaque valeur propre, donner une base du sous-espace propre de f constituée de polynômes, ainsi que sa dimension.

Éléments de correction.

1. La dérivation et la multiplication par $X+1$ sont linéaires ; pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $(X+1)P' \in \mathbb{R}_2[X]$. Comme $f(1) = 0$, $f(X) = 1+X$ et $f(X^2) = 2X+2X^2$,
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
2. M est triangulaire : $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{0,1,2\}}$.
3. Pour $P = a+bX+cX^2$, $f(P) = b+(b+2c)X+2cX^2$. L'identification des coefficients dans $f(P) = \lambda P$ donne
$$E_0(f) = \mathrm{Vect}(1), \quad E_1(f) = \mathrm{Vect}(X+1),$$
$$E_2(f) = \mathrm{Vect}((X+1)^2).$$
Chacun de ces espaces est de dimension 1 ; le polynôme indiqué, non nul, en forme une base.

2. Méthode au choix

Exercice 7 Choisir une méthode efficace

Pour chacune des dix matrices suivantes, déterminer **une valeur propre réelle**, en choisissant une méthode adaptée. **Justifier chaque réponse.**

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
5. $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
6. $A_6 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

7. $A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $A_9 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Éléments de correction.
Les choix ci-dessous sont possibles ; une autre méthode correctement justifiée convient aussi.

1. **À vue : sommes des lignes.** Toutes les sommes valent 5. Ainsi $A_1(1,1,1)^t = 5(1,1,1)^t$: $\boxed{5 \in \mathrm{Sp}(A_1)}$.
2. **Déterminant.** $\det(A_2 - \lambda I_2) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$. On peut retenir $\boxed{4 \in \mathrm{Sp}(A_2)}$; un vecteur propre associé est $(2,3)^t$.
3. **Système.** $A_3(x,y,z)^t = \lambda(x,y,z)^t$ équivaut à $y = \lambda x$, $z = \lambda^2 x$ et $6x + y = \lambda z$. Une solution non nulle impose $x \neq 0$, puis $\lambda^3 - \lambda - 6 = 0$. Or $\lambda^3 - \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 3)$. En prenant $\lambda = 2$, on obtient le vecteur propre $(1,2,4)^t$: $\boxed{2 \in \mathrm{Sp}(A_3)}$.
4. **À vue : lignes égales.** Les deux dernières lignes de $A_4 - I_3$ sont égales à $(1,1,2)$. Donc $A_4 - I_3$ n'est pas inversible : $\boxed{1 \in \mathrm{Sp}(A_4)}$. On peut vérifier que $(2,-4,1)^t$ est un vecteur propre associé.
5. **Déterminant.** $\det(A_5 - \lambda I_2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. On peut retenir $\boxed{1 \in \mathrm{Sp}(A_5)}$, associé par exemple à $(-2,1)^t$.
6. **À vue : matrice triangulaire.** Ses coefficients diagonaux sont -2, 4, 6, qui sont ses valeurs propres. On peut retenir $\boxed{-2 \in \mathrm{Sp}(A_6)}$, associé à $(1,0,0)^t$.
7. **Système.** Les équations sont $2y = \lambda x$, $4z = \lambda y$, $x = \lambda z$. En substituant, on obtient $(\lambda^3 - 8)z = 0$. Si $z = 0$, toutes les coordonnées sont nulles ; sinon $\lambda^3 = 8$, donc $\lambda = 2$. Pour $z = 1$, on trouve $(x,y,z) = (2,2,1)$: $\boxed{2 \in \mathrm{Sp}(A_7)}$.
8. **À vue : colonnes égales.** Les première et troisième colonnes de A_8 sont égales. Ainsi $A_8(1,0,-1)^t = 0$ avec $(1,0,-1)^t \neq 0$: $\boxed{0 \in \mathrm{Sp}(A_8)}$.
9. **Déterminant.** $\det(A_9 - \lambda I_2) = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. On peut retenir $\boxed{2 \in \mathrm{Sp}(A_9)}$, associé à $(1,-2)^t$.
10. **Système.** Les équations donnent $y = (\lambda - 1)x$, $z = (\lambda - 1)^2 x$ et $8x = (\lambda - 1)z$. Pour une solution non nulle, $x \neq 0$, donc $(\lambda - 1)^3 = 8$, soit $\lambda = 3$. Avec $x = 1$, on obtient $(1,2,4)^t$: $\boxed{3 \in \mathrm{Sp}(A_{10})}$.