Valeurs propres et sous-espaces propres

ECG2 - mathématiques approfondies

Rappel de méthode

On travaille sur $\mathbb{R}$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff A - \lambda I_n \text{ non inversible} \iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}.}$$

1. Rechercher les valeurs propres.

a. **Polynôme annulateur.** Vérifier $P(A) = 0$. Toute valeur propre est une racine réelle de P. Tester ces racines : elles sont seulement **potentielles**.

b. **À vue.** Deux lignes égales dans $A - aI_n$ impliquent sa non-inversibilité : a est valeur propre. Autre piste : calculer AU avec $U = (1, \dots, 1)^t$. Si $AU = sU$, alors s est valeur propre.

c. **Ordre 2.** Résoudre $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

d. **Étude directe.** Résoudre $(A - \lambda I_n)X = 0$ selon λ, ou étudier les pivots. **Isoler les valeurs qui annulent un pivot avant de diviser.**

Pour une matrice triangulaire, lire les valeurs propres sur la diagonale. Pas de déterminant au-delà de l'ordre 2 ici.

2. Déterminer les sous-espaces propres. Pour chaque valeur propre λ, résoudre $(A - \lambda I_n)X = 0$ et paramétrer les solutions pour écrire

$$\begin{aligned} E_\lambda(A) &= \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \\ &= \mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_p). \end{aligned}$$

Vérifier que les générateurs sont libres pour donner une base et la dimension.

Le sous-espace propre contient 0 ; un **vecteur propre est non nul**.

1. Exercices d'application

Consigne commune. Pour chaque matrice, déterminer toutes les valeurs propres réelles, puis donner une base et la dimension de chaque sous-espace propre. Les questions précisent la méthode de recherche à utiliser.

Exercice 1 — Un polynôme annulateur

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$, puis montrer que $P(X) = (X - 2)^2(X + 1)$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire les valeurs propres potentielles de A, puis déterminer le spectre et les sous-espaces propres.

Exercice 2 — Deux observations à vue

On considère

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Observer les lignes de $B - I_3$. En déduire une valeur propre de B.
2. Calculer BU. En déduire une autre valeur propre.
3. Pour $V = (x, y, z)^t$, poser $s = x + y + z$ et exprimer BV à l'aide de V et de U. En déduire que les valeurs propres précédentes sont les seules, puis déterminer leurs sous-espaces propres.

Exercice 3 — Un déterminant d'ordre 2

On considère

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser $\det(C - \lambda I_2)$. En déduire les valeurs propres de C.
2. Déterminer les sous-espaces propres associés.

Exercice 4 — Une étude directe en fonction de λ

On considère

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, écrire le système $(D - \lambda I_3)(x, y, z)^t = 0$.
2. En utilisant la première équation pour éliminer y, déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le système possède une solution non nulle. On n'utilisera pas de déterminant d'ordre 3.
3. Déterminer les sous-espaces propres de D.

Exercice 5 — Une racine qui n'est pas valeur propre

On considère

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $(E - I_3)^2(E - 2I_3) = 0$.
2. En déduire que $Q(X) = (X + 1)(X - 1)^2(X - 2)$ est un polynôme annulateur de E. Quelles sont les valeurs propres potentielles obtenues avec Q ?
3. Montrer que -1 n'est pas valeur propre de E.
4. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de E.

Exercice 6 — Sur un espace de polynômes

On considère l'application

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X], \qquad f(P) = (X + 1)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme et déterminer sa matrice M dans la base canonique $(1, X, X^2)$.
2. Déterminer les valeurs propres de f en observant M.
3. Pour chaque valeur propre, donner une base du sous-espace propre de f constituée de polynômes, ainsi que sa dimension.

2. Méthode au choix

Exercice 7 **Choisir une méthode efficace**

Pour chacune des dix matrices suivantes, déterminer **une valeur propre réelle**, en choisissant une méthode adaptée. **Justifier chaque réponse.**

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
5. $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
6. $A_6 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
7. $A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
8. $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
9. $A_9 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
10. $A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.