Lycée Louis Thuillier — Année 2026-2027
ECG2

Devoir maison 5 pour le .....

Exercice 1 (Ecricome 2023)**.**
Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie I

1. Dans cette question uniquement, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer AB et BA.

   Par de simples calculs : $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de AB et BA

   AB et BA étant deux matrices triangulaires, leurs valeurs propres sont leurs éléments diagonaux .

   On a donc $\boxed{Spec\,(AB) = Spec\,(BA) = \{2, -1\}}$.

   Il reste alors à déterminer les sous espaces propres correspondants , sachant qu'ils seront de dimension 1 car AB et BA ont chacune deux valeurs propres distinctes .

   Pour AB : Si on note C_1 et C_2 les colonnes de AB .

   — C_1 nous montre tout de suite que $AB.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   par conséquent $\boxed{E_{2,AB} = \ker(AB - 2I_2) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$.

   — De $C_1 - C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on déduit que $AB.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1).\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

   par conséquent $\boxed{E_{-1,AB} = \ker(AB + I_2) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$.

   Pour BA : Si on note C'_1 et C'_2 les colonnes de BA .

   — C'_1 nous montre tout de suite que $AB.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   par conséquent $\boxed{E_{-1,BA} = \ker(BA + I_2) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$.

   — De $C'_2 + C'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, on déduit que $BA.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (2).\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   par conséquent $\boxed{E_{2,BA} = \ker(BA - 2I_2) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

Soit maintenant A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit λ une valeur propre non nulle de AB et X un vecteur propre associé.

   (a) Justifier que $BX \neq 0$.

   Si on avait $BX = 0$, on aurait aussi $ABX = 0$ et donc $\lambda X = 0$, ce qui est en contradiction avec " $\lambda \neq 0$ et $X \neq 0$ " . On a donc $\underline{BX \neq 0.}$

(b) Montrer que BX est un vecteur propre de BA et que λ est une valeur propre de BA.
Puisque $ABX = \lambda X$, $BA.BX = B\lambda X = \lambda BX$.
Et comme , de plus $BX \neq 0$,

BX est un vecteur propre de BA associé à la valeur propre λ (pour BA).

3. Supposons que 0 est une valeur propre de AB et X un vecteur propre associé.
(a) Supposons que B est inversible.
Justifier que $BX \neq 0$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA.
Supposons ici que B est inversible.
Si on avait $BX = 0$, on aurait aussi $B^{-1}BX = 0$ et donc $X = 0$,qui contredit l'hypothèse $X \neq 0$. Par conséquent $BX \neq 0$.

Comme $BX \neq 0$ et $BABX = 0 = 0.BX$,

0 est une valeur propre de BA , associée au vecteur propre BX.

(b) Supposons que B n'est pas inversible. Montrer que $\text{rg}(BA) < n$. En déduire que 0 est une valeur propre de BA.
Supposons que B n'est pas inversible, donc que $\text{rg}\,(B) < n$.

Pour cela , redémontrons que $\text{rg}\,(BA) \leqslant \text{rg}\,(B)$:

Si $Y \in \text{Im(BA)}$, il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $Y = BAX = B.AX$, on a donc aussi $Y \in \text{Im(B)}$.
Par suite $\text{Im(BA)} \subset \text{Im(B)}$, et donc $\text{rg}\,(BA) = \dim(\text{Im(BA)}) \leqslant \dim(\text{Im(B)}) = \text{rg}\,(B)$

Il est maintenant évident que $\text{rg}\,(BA) < n$ et que donc la matrice BA n'est pas inversible.
C'est une condition bien suffisante pour pouvoir affirmer que 0 est une valeur propre de BA.

4. Montrer que AB et BA ont le même spectre.
En distinguant dans 2) et 3) les cas $\lambda \neq 0$ et $\lambda = 0$, on a montré que toute valeur propre λ de AB est aussi une valeur propre de BA . Donc $Spec\,(AB) \subset Spec\,(BA)$.
En inversant les rôles de A et B , on montrerait de même que $Spec\,(BA) \subset Spec\,(AB)$.

Par conséquent AB et BA ont le même spectre.

5. Les matrices AB et BA ont-elles les mêmes sous-espaces propres ?
L'exemple du 1) nous montre que les matrices AB et BA n'ont pas forcément les mêmes sous-espaces propres.

Partie 2

On considère A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, ..., \lambda_n$ deux à deux distinctes. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$.

6. Supposons qu'il existe un n-uplet de réels non tous nuls $(\alpha_0, ..., \alpha_{n-1})$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$.
(a) Justifier que A admet un polynôme annulateur non nul Q de degré inférieur ou égal à $n-1$.
En notant Q le polynôme $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k$, on a

$$Q(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0.$$

De plus , Q est de degré inférieur ou égal à $n-1$ et Q n'est pas le polynôme nul car les α_i ne sont pas tous nuls, par conséquent

A admet un polynôme annulateur non nul Q de degré inférieur ou égal à $n-1$.

(b) En étudiant les racines de ce polynôme Q annulateur de A, aboutir à une contradiction.

On sait d'après le cours , que toute valeur propre de A est racine des polynômes annulateurs de A . Comme on a supposé que A admet n valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, on en déduit donc que le polynôme Q (annulateur de A) admet au moins n racines distinctes .

On aboutit donc à une contradiction puisque tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ admet au plus $n-1$ racines distinctes.

(c) Que peut-on en déduire sur la famille $(I_n, A, ..., A^{n-1})$?

L'hypothèse qu'il existe un n-uplet de réels non tous nuls $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$ amène à une contradiction , c'est donc qu'il n'existe pas de n-uplet de réels non tous nuls $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$.

Ce qui permet d'affirmer que la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{n-1}\right)$ est une famille libre .

7. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

(a) Justifier que l'espace propre de A associé à la valeur propre λ est l'espace vectoriel engendré par X.

Comme on l'a dit précédemment : puisque A admet n valeurs propres distinctes et que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les sous espaces propres de A sont tous de dimension égale à 1.
Par conséquent , puisque le vecteur X est non nul (c'est un vecteur propre!!) et que X appartient au sous espace propre $E_{\lambda,A}$, on peut affirmer qu'il forme une base de $E_{\lambda,A}$.

On a donc bien : $E_{\lambda,A} = Vect(X)$.

(b) Exprimer de deux manières différentes BAX.

— Puisque $AX = \lambda X$, $BAX = B\lambda X = \lambda BX$.
— Mais comme$AB = BA$, on a aussi $BAX = A.BX$

(c) En déduire que $BX \in \text{Vect}(X)$.

Comme $BAX = A.BX = \lambda BX$,et on a donc $BX \in E_{\lambda,A} = Vect(X)$.

8. Déduire que tout vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B.

On a $BX \in E_{\lambda,A} = Vect(X)$, c'est donc qu'il existe un réel μ tel que $BX = \mu X$ et X est alors un vecteur propre de B associé à la valeur propre μ.
On en déduit que tout vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B.

9. (a) Justifier qu'il existe une base $(X_1, ..., X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A et de B telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ AX_i = \lambda_i X_i$$

D'après le cours , comme A admet n valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, A est diagonalisable et donc :
il existe une base $\mathcal{B}' = (X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A associés à ces λ_i :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ AX_i = \lambda_i X_i.$$

Et de plus, d'après ce qui précède , tous ces vecteurs X_i sont aussi des vecteurs propres de B .

(b) Pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, on note μ_i le réel tel que $BX_i = \mu_i X_i$. Montrer que $\text{Sp}(AB) = \{\lambda_i \mu_i, i \in [\![1, n]\!]\}$.

Si pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, on note μ_i le réel tel que $BX_i = \mu_i X_i$, on a alors une base $(X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de B associés à ces μ_i .

Par conséquent, B est aussi diagonalisable dans cette même base et en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à cette base $\mathcal{B}'$, on a :

$$P^{-1}BP = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n), \text{ mais aussi } P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Le calcul $P^{-1}ABP = P^{-1}APP^{-1}BAP = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).diag(\mu_1, \ldots, \mu_n) = diag(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n)$ montre alors que AB est aussi diagonalisable dans cette même base avec pour ensemble de valeurs propres :

$$Spec(AB) = \{\lambda_i\mu_i, i \in [\![1, n]\!]\}$$

10. On rappelle que le seul polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ ayant n racines deux à deux distinctes est le polynôme nul.

(a) Montrer que l'application $P \mapsto (P(\lambda_1), ..., P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$.
Notons ϕ l'application $P \mapsto (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$ de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$.

Il s'agit de montrer que ϕ est linéaire et bijective :

- Pour tout $(a, P, Q)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{n-1}[x] \times \mathbb{R}_{n-1}[x]$:

$$\begin{aligned}\phi(aP + Q) &= ((aP + Q)(\lambda_1), \ldots, (aP + Q)(\lambda_n)) \\ &= (aP(\lambda_1) + Q(\lambda_1), \ldots, aP(\lambda_n) + Q(\lambda_n)) \\ &= a(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) + (Q(\lambda_1), \ldots, Q(\lambda_n)) \\ &= a\phi(P) + \phi(Q)\end{aligned}$$

et donc ϕ est linéaire

- Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, telle que $\phi(P) = (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont donc ici n racines distinctes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
D'après le rappel ci-dessus , P ne peut qu'être le polynôme nul . On vient donc de montrer que le noyau de ϕ est réduit au 0 de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ et que ϕ est injective.
Comme de plus ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$ et que ces deux espaces vectoriels ont la même dimension (n), le corollaire habituel du théorème du rang permet d'affirmer que ϕ est aussi surjective donc bijective .

Ainsi : l'application $P \mapsto (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$.

(b) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1, n]\!], BX_i = P(\lambda_i)X_i$$

On a $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$.
ϕ étant bijective de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ vérifiant :

$$\phi(P) = (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) = (\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

On a donc aussi ($X_i \in E_{\mu_i, B}$) :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ BX_i = P(\lambda_i)X_i$$

(c) Montrer que $B = P(A)$.

Notons $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k$, le polynôme déterminé au b) et montrons que $B = P(A)$:

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1,n]\!] : P(A).X_i &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k\right) X_i = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k X_i \\ &\underset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k X_i = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k\right) X_i \\ &= P(\lambda_i) X_i \end{aligned}$$

(*) : Comme $AX_i = \lambda_i X_i$, on démontrerait par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N} : A^k X_i = \lambda_i^k X_i$.

On a donc démontré : $\forall i \in [\![1,n]\!], P(A)X_i = P(\lambda_i)X_i = BX_i$.
C'est donc que les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés aux matrices $P(A)$ et B coïncident sur la base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Ces deux endomorphismes sont donc égaux et leurs matrices dans la base canonique aussi égales .
Par suite : $\boxed{B = P(A)}$

11. (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AB = BA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ \mid \ AB = BA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- On a bien $\mathcal{C}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- On a bien $\mathcal{C}(A)$ qui est non vide car $A.0 = 0.A$.
- Soient B_1 et B_2 deux matrices de $\mathcal{C}(A)$ (qui commutent avec A) et a et b deux réels :

$$A\left(aB_1 + bB_2\right) = aAB_1 + bAB_2 = aB_1A + bB_2A) = \left(aB_1 + bB_2\right)A$$

La matrice $(aB_1 + bB_2)$ commute elle aussi avec A et appartient donc à $\mathcal{C}(A)$.
$\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ est donc bien un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

(b) Montrer que $\mathcal{C}(A) = \{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}$.

Montrons que $\mathcal{C}(A) = \{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}$ par double inclusion :

— On a montré à la question 10) que si $AB = BA$, alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $B = P(A)$, par conséquent $\mathcal{C}(A) \subset \{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\}$.

— Réciproquement, de façon classique, pour tout polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, on a :

$$A.P(A) = A.\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^{k+1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k\right) A = P(A).A$$

Donc $\{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\} \subset \mathcal{C}(A)$.

(c) A l'aide de la question 6, déterminer la dimension de $\mathcal{C}(A)$.

Comme $\mathcal{C}(A) = \{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\} = Vect\left(I_n, A, \ldots, A^{n-1}\right)$, la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{n-1}\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{C}(A)$.
Et comme d'après la question 6) cette famille est libre , on en déduit que la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{n-1}\right)$ est une base de $\mathcal{C}(A)$.
En conclusion : $\boxed{dim(\mathcal{C}(A)) = card\left(I_n, A, \ldots, A^{n-1}\right) = n}$