
TD 9 - Dérivabilité d'une fonction réelle d'une variable réelle

Exercice 1.

La fonction définie par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2.

Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$
2. $f(x) = x\sqrt{x}$
3. $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

Exercice 3.

Soit f dérivable sur $[a, b]$ telle que $|f'(x)| \leq M$.

1. On suppose que $f(a) = 0$. Montrer que :

$$\int_a^b |f(t)| dt \leq M \frac{(b-a)^2}{2}$$

2. On suppose que $f(b) = 0$. Montrer que :

$$\int_a^b |f(t)| dt \leq M \frac{(b-a)^2}{2}$$

Exercice 4.

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que

$$f(a) = f(b) \text{ et } f'(a) = 0$$

1. Donner une allure possible du graphe de f .
2. On pose :

$$\forall x \in [a, b], g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

- (a) Montrer qu'il existe c tel que $g'(c) = 0$.
- (b) En déduire l'existence d'un réel $d \in [a, b]$ tel que $f'(d) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- (c) Peut-on en tirer une conclusion géométrique ?

Exercice 5.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer en raisonnant par l'absurde qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 6.

Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ admettant n zéros distincts sur cet intervalle. Démontrer que f' s'annule au moins $n - 1$ fois sur cet intervalle.

Exercice 7.

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et telle qu'il existe $a > 0$ avec $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la tangente à la courbe en $(c, f(c))$ passe par O.

Exercice 8.

Étudier les fonctions définies par :

1. $f(x) = \sqrt{\frac{\ln(x)}{x}}$
2. $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$
3. $f(x) = \sqrt{|x-1|} - \ln(x)$
4. $f(x) = \frac{x}{e^{1/x} + 1}$
5. $f(x) = x \arctan(1/x)$
6. $f(x) = x^{1/x}$

Exercice 9.

On considère une fonction g continue et dérivable sur $[0, +\infty[$, telle que $g(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Le but est de généraliser le théorème de Rolle, à savoir que sous ces hypothèses, il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $g'(c) = 0$.

On introduit la fonction G définie sur $[0, 1]$ par $G(x) = \begin{cases} g\left(\frac{1}{x} - 1\right) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Justifier que G est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.
2. A l'aide du théorème de Rolle, montrer que G' s'annule sur $]0, 1[$.
3. Calculer alors G' pour en déduire le résultat.

Exercice 10.

A l'aide de l'égalité ou de l'inégalité des accroissements finis :

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $x \leq e^x - 1 \leq xe$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Exercice 11.

Simplifier pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ l'expression $\arctan(x) + \arctan(1/x)$.

Exercice 12.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\ln(x))$.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Appliquer l'égalité des accroissements finis sur $[k, k+1]$ à f .
3. En déduire pour $k \geq 2$: $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k\ln(k)}$.
4. Montrer alors que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ de terme général $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln(k)}$ diverge.

Exercice 13.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ lorsque $x \neq 0$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. On pourra admettre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
5. Qu'en déduit-on ?