Devoir maison 6 pour le 12/11/2026

Exercice 1 (EML2019 Partie A)**.**
Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes (ou fonctions polynomiales) à coefficients réels de degré inférieurs ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ sa base canonique.

Dans toute cette partie, a désigne un réel quelconque.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\Psi_a(P) = 2P + (X-a)P'$.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^2}\displaystyle\int_a^x (t-a)P(t)\mathrm{d}t & \text{si } x \neq a, \\ \dfrac{P(a)}{2} & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Enfin on définit, pour tout k de $[\![0; n]\!]$, le polynôme Q_k par : $Q_k = (X-a)^k$.

1. Montrer que l'application $\Psi_a : P \mapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Montrer que Ψ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
   (b) Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Calculer, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $\Psi_a(Q_k)$.
   (d) En déduire une base de chacun des sous-espaces propres de Ψ_a.
4. (a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\big((X-a)^2P(X)\big)'$ en fonction de $\Psi_a(P)$.
   (b) En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$: $\Phi_a\big(\Psi_a(P)\big) = P$.
   (c) En déduire que $\Phi_a : P \mapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.
   (d) Montrer que Φ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Exercice 2 (EDHEC 2012)**.**
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.
   (b) En déduire les valeurs propres de f.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. (a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id})$.

(b) On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $g^2 = f$.
On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.
Etablir que $\ker(f^2)$ est stable par g, puis montrer que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$

En utilisant la matrice de f dans cette même base, trouver une contradiction et conclure.

4. Etude d'un cas plus général.
On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ (où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1) et on désigne par α un réel non nul.

(a) On considère un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que $h^n = \alpha h^{n-1}$.
Montrer que : $\mathbb{R}^n = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha\mathrm{Id})$.

(b) Montrer réciproquement que, si un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ est tel que $\mathbb{R}^n = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha\mathrm{Id})$, alors on a : $h^n = \alpha h^{n-1}$.