Lycée Louis Thuillier Année 2026-2027
ECG2

Semaine de colle 7 du 09/11/2026 au 13/11/2026

Programme :

1. **Chapitre 4 : Applications linéaires (Rappels)**
2. **Chapitre 5 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées**
   (a) Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres d'un endomorphisme/d'une matrice : définition, caractérisation par le noyau/le rang
   (b) Recherche de valeurs propres
      i. Cas des matrices 2×2
      ii. Cas des matrices triangulaires
      iii. Avec un polynôme annulateur : si P est un polynôme annulateur de f (ou de A) alors les valeurs propres de f (ou A) sont des racines de P
      iv. Recherche "à vue" : $A - \lambda I_n$ non inversible (car lien entre les lignes ou les colonnes), $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ si la somme des termes de chaque ligne est toujours la même.
      v. Cas général : échelonnement de $A - \lambda I_n$
   (c) Détermination des espaces propres
   (d) Propriétés : sous-espaces propres stables, les sous-espaces propres sont en somme directe, nombre de valeur propre max, somme des dimensions des espaces propres $\leq n$
   (e) Réduction : Définition f diagonalisable, A diagonalisable, Conditions de diagonalisabilité
      - Condition nécessaire et suffisante Thm 2.1.3 et Thm 2.1.4 critère de diagonalisabilité avec la dimension des sous-espaces propres
      - Condition suffisante : f admet n valeurs propres distinctes
      - A l'opposé une application/matrice ne possédant qu'une valeur propre n'est diagonalisable que si $f = \lambda Id$ ($A = \lambda I_n$)
      - Condition suffisante : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.
   (f) Si A est diagonalisable alors $Tr(A) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} m_\lambda \lambda$. Où $m_\lambda = \dim(E_\lambda(A))$.
   (g) Méthodes pratique de la diagonalisation.

Exemples de question de cours

1. Donner la définition de λ est une valeur propre de f.
2. Donner la définition de λ est un vecteur propre de f.
3. Quelles sont les valeurs propres d'une matrice triangulaire ?
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Donner la définition de $E_\lambda(f)$
5. Quelle équation doit vérifier une valeur propre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
6. Donner la définition de A est diagonalisable.

Remarque aux colleurs :

- Les déterminants (à part pour les matrices 2×2) et donc les polynômes caractéristiques ne sont pas au programme d'ECG.