Devoir surveillé 2 du 6/11/2026 - Type EML
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 5 pages

SUJET EML 2021

Exercice 1 EDHEC 2019

Partie 1 : étude d'un exemple

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 3A - 2I$.
$P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ est un polynôme de degré 2 annulateur de A.

(b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
Par propriété, $^(A) \subset \{\text{racines de } P\}$ soit $^(A) \subset \{1, 2\}$.
Les valeurs propres possibles de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

(c) En `Python`, la commande `r=al.rank(M)` renvoie dans la variable `r` le rang de la matrice M. On a saisi :

```
A=np.array([[1,0,0],[-2,3,-2],[-1,1,0]])
r1=al.rank(A-np.eye(3))
r2=al.rank(A-2*np.eye(3))
print('r1=',r1)
print('r2='r2)
```

`Python` a renvoyé :

```
r1 =
    1.
r2 =
    2.
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?
Les valeurs propres de f sont égales à celles de A.
Pour λ réel, on note $E_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{Id})$.
Avec le théorème du rang, $\dim E_\lambda = 3 - \mathrm{rg}(A - \lambda I_3)$. On peut donc conjecturer que 1 et 2 sont effectivement valeurs propres de f et que $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 1$.

(d) Donner une base de chacun des noyaux $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ et $\mathrm{Ker}(f-\lambda_2 Id)$.

$(A-I_3)X=0 \Leftrightarrow -x_1+x_2-x_3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 &= x_1+x_3 \\ x_1 &\in \mathbb{R} \\ x_3 &\in \mathbb{R} \end{cases}$ et l'espace propre associé à la valeur propre 1 est $E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et forment une famille libre.

$1 \in (f)$ et $((1,1,0),(1,0,-1))$ est une base de $\ker(f-\mathrm{Id})$.

$(A-2I)X=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 2x_3 \end{cases}$ et $E_2(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.

2 est valeur propre de f et $(0,2,1)$ est une base de $\ker(f-2\,\mathrm{Id})$.

2. (a) Justifier qu'il existe une base (u_1,v_1,v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1,v_1) est une base de $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ et (v_2) une base de $\mathrm{Ker}(f-\lambda_2 Id)$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.

Par la question 1., les valeurs propres de f sont 1 et 2, et la somme des dimensions des espaces propres de f vaut 3, soit $\dim \mathbb{R}^3$. f est donc diagonalisable et $\ker(f-\mathrm{Id})\oplus\ker(f-2\,\mathrm{Id})=\mathbb{R}^3$. La concaténation de bases de chacun des espaces propres est une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour respecter les conditions imposées, changeons la base trouvée pour E_1.

$$\mathrm{Vect}<\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}>=\mathrm{Vect}<\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}>=\mathrm{Vect}<\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}>$$

et la famille en jeu est encore libre. Prenons donc :

$$u_1=(1,1,0),\quad v_1=(0,1,1),\quad v_2=(0,1,2)$$

(u_1,v_1) est une base de $\ker(f-\mathrm{Id})$ et v_2 est une base de $\ker(f-2\,\mathrm{Id})$. Leur concaténation (u_1,v_1,v_2) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) On note $x=(a,b,c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1,v_1,v_2).

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases} a+\lambda+2\gamma=b \\ \lambda+\gamma=c \end{cases}$.

On trouve en résolvant ce système :

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(a-b+2c)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+(-a+b-c)\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$x=(a,b,c)$ a pour coordonnées a, $a-b+2c$, $-a+b-c$ dans la base (u_1,v_1,v_2).

Partie 2 : généralisation

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n\geq p\geq 2$, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres, λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_p, deux à deux distinctes.

On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}(f-\lambda_k Id)$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D.

(a) En notant I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$(D-\lambda_1 I_n)(D-\lambda_2 I_n)\dots(D-\lambda_p I_n) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Posons $P(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_p)$. On cherche à calculer $P(D)$.
Comme D est une matrice diagonale, de coefficients diagonaux $d_{1,1},\dots,d_{n,n}$, on a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $D^k = \begin{pmatrix} d_{1,1}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{n,n}^k \end{pmatrix}$, et par règles de calcul matriciel, pour $a_0, a_1, \dots, a_p$ réels :

$$a_0 I + a_1 D + \dots + a_p D^p = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p} a_k d_{1,1}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{p} a_k d_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{k=0}^{p} a_k d_{n,n}^k \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que $P(D) = \begin{pmatrix} P(d_{1,1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(d_{2,2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(d_{n,n}) \end{pmatrix}$.
La matrice diagonale D est une matrice qui comporte sur sa diagonale les valeurs propres de f : pour tout i, $d_{i,i}\in\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\}$, donc tous les coefficients diagonaux de D sont des racines de P.
Finalement, $P(D) = 0$.

$\boxed{(D-\lambda_1 I_n)(D-\lambda_2 I_n)\dots(D-\lambda_p I_n) = 0}$

(b) En déduire un polynôme annulateur de f.
Le polynôme P présenté en question précédente est donc annulateur de D et

$$0 = P(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)) \underset{\text{cours}}{=} \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(P(f)) \text{ et donc } P(f) = 0$$

$\boxed{(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_p) \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$

Pour chaque k de $[\![1,p]\!]$, on définit le polynôme $L_k = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \frac{X-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$

4. (a) En distinguant les cas $i=k$ et $i\neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.
Pour k fixé dans $[\![1,p]\!]$, les racines de L_k sont $1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,p$ (on les a facilement car L_k est sous forme factorisée). Pour $i\in[\![1,p]\!]$, $i\neq k$, $L_k(\lambda_i)=0$.
Par produit de termes valant 1, $L_k(\lambda_k)=1$.

$$\boxed{L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=k \\ 0 & \text{si } i\neq k \end{cases}}$$

(b) Montrer que $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

• Le degré de chaque polynôme L_k est $p-1$, donc la famille $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est bien une famille de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

• Montrons que cette famille est libre. Soient $a_1, a_2, \dots, a_p$ des réels tels que $a_1L_1 + a_2L_2 + \cdots + a_pL_p = 0$.
On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $a_1L_1(x) + a_2L_2(x) + \cdots + a_pL_p(x) = 0$. En évaluant en $x = \lambda_i$ et en utilisant a., on trouve $a_i = 0$.
Les réels sont tous nuls et la famille $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est libre.

• $\text{Card}(L_1, L_2, \dots, L_p) = p = \dim \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
Par ces trois points, $\boxed{(L_1, L_2, \dots, L_p) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{p-1}[X]}$.

(c) Établir alors que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k)L_k$$

Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$. En utilisant la base précédente, il existe des réels $a_1, a_2, \dots, a_p$ tels que $P = a_1L_1 + a_2L_2 + \cdots + a_pL_p$.
On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a_1L_1(x) + a_2L_2(x) + \cdots + a_pL_p(x)$. En évaluant en $x = \lambda_i$ et en utilisant a., on trouve $P(\lambda_i) = a_i$.

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X], \quad P = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i)L_i}$$

(d) En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} L_i = 1$.

On applique la question précédente au polynôme constant égal à 1, qui appartient à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} L_i = 1}$$

5. (a) Montrer que, pour tout x de E, $L_k(f)(x)$ appartient à $\text{Ker}(f - \lambda_k Id)$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $L_k(f)$.

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}(f - \lambda_k \,\text{Id})(L_k(f)(x)) &= ((f - \lambda_k \,\text{Id}) \circ L_k(f))(x) \\ &= c_k((f - \lambda_k \,\text{Id}) \circ Q(f))(x)\end{aligned}$$

$$\text{où } c_k = \prod_{j \in [\![1,p]\!],\ j \neq k} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j} \text{ et où } Q = \prod_{j \in [\![1,p]\!],\ j \neq k} (X - \lambda_j)$$

$$\begin{aligned}(f - \lambda_k \,\text{Id})(L_k(f)(x)) &= c_k((X - \lambda_k) \times Q)(f)(x) = c_k P(f)(x) \\ &= 0 \text{ par 3.b.}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in E,\ L_k(f)(x) \in \ker(f - \lambda_k \,\text{Id})}$.

(b) En déduire la décomposition cherchée.

Par 4.d. en l'endomorphisme f, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} L_i(f) = \text{Id}$.

Soit $x \in E$. On applique l'endomorphisme précédent en x :

$$x = \text{Id}(x) = \sum_{i=1}^{p} L_i(f)(x)$$

Par la question précédente, pour tout i, $L_i(f)(x) \in \ker(f - \lambda_i \,\text{Id})$. Ce qui précède constitue donc la décomposition d'un vecteur x de E dans la somme directe $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \ker(f - \lambda_i \,\text{Id})$.

6. Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$ et $p = 2$.
Ici $p = 2$, il y a deux polynômes : $L_1 = \frac{X-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} = 2 - X$ et $L_2 = \frac{X-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} = X - 1$. Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Par 5.,

$$x = (2\,\mathrm{Id} - f)(x) + (f(x) - x)$$

Comme

$$\begin{aligned}(2I - A)X &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ 2a - b + 2c\\ a - b + 2c\end{pmatrix}\\ &= a\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + (a - b + 2c)\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\\ \text{et } (A - I)X &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = (-a + b - c)\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

on retrouve bien $x = au_1 + (a - b + 2c)v_1 + (-a + b - c)v_2$.

Exercice 2 EDHEC 2016

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.
On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. (a) Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} < 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (pas des formes indéterminées)

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

(b) Vérifier que chaque terme de la sutie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.
Par récurrence immédiate de la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : u_n \text{ est bien défini et } u_n > 0$$

2. Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

```
u=1
n=0
while u>0.00001:
    u = exp(-u)/u
    n=n+1
print(n)
```

```
u=1
n=0
while u<100000:
    u = exp(-u)/u
    n=n+1
print(n)
```

Les script calculent les termes successifs de la suite, mais le premier script s'arrête lorsque `u<=0.00001` et le second lorsque `u>=100000`, `n` sert de compteur, il indique l'indice du dernier terme calculé.
Conclusion : $u_5 \leqslant 0,00001$ et $u_6 \geqslant 100000$ et ce sont les premiers termes de la suite à vérifier ces inégalités.
De telles écarts peuvent nous faire conjecturer que la suite n'admet pas de limite (et même que la suite des termes de rang pair tend vers $+\infty$ et celle des termes de rang impair tend vers 0).

3. (a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = e^{-x} - x^2$$

g est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction g est donc continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 1]$

(b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x$ ssi $\frac{e^{-x}}{x} = x$ ssi $e^{-x} = x^2$ ssi $g(x) = 0$. Or d'après la question précédente 0 possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+$ par g. On le note alors $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

(c) Montrer que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

Déterminons le signe de $g\left(\frac{1}{e}\right)$ et $g(1)$:
On a : $g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e} - \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^{1/e}} - \frac{1}{e^2}$, or $\frac{1}{e} < 2$ donc par croissance de la fonction exponentielle $e^{1/e} < e^2$, donc en inversant $\frac{1}{e^{1/e}} > \frac{1}{e^2}$ et donc $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$.
Plus simplement, $g(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$, puisque $e > 2$.
En conclusion : $g(1) < g(\alpha) < g\left(\frac{1}{e}\right)$, or comme g est strictement décroissante on a donc : $1 > \alpha > \frac{1}{e}$.

4. (a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

On peut calculer : $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{e}$ et $u_2 = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^{-1/e}}{1/e} = e^{\frac{e-1}{e}}$. Or pour cette dernière, $\frac{e-1}{e} > 0$ donc $e^{\frac{e-1}{e}} > 1$ et on a alors bien $u_2 = f(u_1) > 1$ donc $u_2 > u_0$.
Pour l'autre inégalité, il suffit de remarquer que f est décroissante de :

$$u_2 > u_0$$

on tire :

$$f(u_2) < f(u_0)$$

soit

$$u_3 < u_1$$

(b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour cela, on peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{2n+2} > u_{2n}$.
L'initialisation a été faite en (a). Supposons que $u_{2n+2} > u_{2n}$ pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a alors en composant par f (décroissante) :

$$u_{2n+3} < u_{2n+1}$$

et en composant encore une fois par f (décroissante) :

$$u_{2n+4} > u_{2n+2}$$

La propriété est alors initialisée pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Pour $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ c'est plus simple : comme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n+2} > u_{2n}$$

en composant par f (décroissante), on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n+3} < u_{2n+1}$$

et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est alors bien décroissante.

5. On pose : $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & , \text{si } x > 0 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \end{cases}$

   (a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.
   Pour $x > 0$,

$$h(x) = f(f(x)) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} = x\frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{e^{-x}} = xe^{x-\frac{e^{-x}}{x}} = xe^{x-f(x)}$$

   De plus, d'après 1., on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc par composition de limite : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(f(x)) = 0 = h(0)$, donc h est bien continue en 0.

   (b) Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a : $h(x) = x$ ssi $xe^{x-f(x)} = x$ ssi $\begin{cases} x = 0 \\ \textit{ou en divisant par } x \neq 0 \\ x - f(x) = 0 \end{cases}$
   L'équation $h(x) = x$ n'admet donc que deux solutions sur $\mathbb{R}_+$: 0 et α.

   (c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers une limite $l < u_1 = \frac{1}{e} < \alpha$ (d'après 3.(c)), de plus $u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$, donc l vérifie $h(l) = l$. Donc, compte tenu de ce qui précède et du fait que $l < \alpha$ on a nécessairement $l = 0$.

   (d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.
   Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = l' \geqslant 1 = u_0$ alors grâce à f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_{2n}) = f(l')$, ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = f(l') = 0$, d'après la question précédente. Ceci est absurde puisque 0 n'a pas d'antécédent par f d'après 1.(a).
   Conclusion : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, de plus, étant croissante, sa limite ne peut être que $+\infty$.

Exercice 3 : EDHEC 2023

On effectue des lancers d'une pièce donnant "pile" avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note F_k l'évènement « obtenir "face" au k^e lancer » et on pose $P_k = \overline{F_k}$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de "face" obtenus avant le premier "pile".

1. a) Utiliser les évènements F_k et P_k pour déterminer la loi de X que l'on note désormais $BN(p)$.
   On remarque que la variable aléatoire $X + 1$ désigne le rang d'apparition du premier pile. Donc elle suit la loi géométrique de paramètre p. Ceci permet de traiter les questions 1.a

et 1.b sans aucun calcul.
Mais l'énoncé semble nous imposer de faire ces calculs, donc on y va pour ne pas perdre de points.
On a $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$ avec :

$$P(X = 0) = P(P_0) = p$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(F_0 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k) \\ &= P(F_0) \times \cdots \times P(F_{k-1}) \times P(P_k) \quad \text{(événements indépendants)} \\ &= q \times \cdots \times q \times p \\ &= q^k \times p \end{aligned}$$

Cette formule est encore valable pour $k = 0$ (car $q^0 p = p$). Bilan : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(X = k) = q^k p}$

b) Calculer l'espérance et la variance de X.
Sous réserve de convergence (absolue) :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k q^k p \\ & pq \sum_{k=0}^{+\infty} k q^{k-1} \end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée de raison q. Comme $-1 < q < 1$, cette série converge. Donc $\boxed{X \text{ admet une espérance}}$ et

$$E(X) = pq \times \frac{1}{(1-q)^2} = pq \times \frac{1}{p^2} = \boxed{\frac{q}{p}}$$

On s'intéresse au moment d'ordre 2. Sous réserve de convergence (absolue), on a par théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 q^k p \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k(k-1) q^k p + k q^k p) \\ &= pq^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2} + pq \sum_{k=0}^{+\infty} k q^{k-2} \quad \text{(linéarité de la somme sur les séries convergentes)} \end{aligned}$$

On reconnaît des séries géométriques dérivées (une fois et deux fois) de raison $q \in]-1;1[$ donc elles sont bien convergentes. Donc X admet un moment d'ordre 2 et :

$$E(X^2) = pq^2 \times \frac{2}{(1-q)^3} + pq \times \frac{1}{(1-q)^2} = pq^2 \times \frac{2}{p^3} + pq \times \frac{1}{p^2} = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$$

Bilan : $\boxed{X \text{ admet une variance}}$ et par formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{q^2+pq}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \boxed{\frac{q}{p^2}} \quad (\text{car } p+q=1)$$

2. Selon le principe de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$, on admet qu'il existe deux variables aléatoires Q et R définies sur le même espace probabilisé que X et telles que $X = 3Q + R$, avec $Q(\Omega) = \mathbb{N}$ et $R(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
Par exemple, si X prend la valeur 5, alors Q prend la valeur 1 et R prend la valeur 2.

   a) Écrire, pour tout entier naturel k, l'évènement $(Q = k)$ a l'aide de la variable X.
   L'événement $[Q = k]$ est réalisé si et seulement si :
   - X vaut $3k$, (et dans ce cas R vaut 0)
   - ou bien X vaut $3k+1$, (et dans ce cas R vaut 1)
   - ou bien X vaut $3k+2$, (et dans ce cas R vaut 2)

   On a donc : $\boxed{[Q = k] = [X = 3k] \cup [X = 3k+1] \cup [X = 3k+2]}$

   b) En déduire que Q suit la loi $BN(1-q^3)$.
   On a $\boxed{Q(\Omega) = \mathbb{N}}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(Q=k) &= P([X=3k] \cup [X=3k+1] \cup [X=3k+2]) \\ &= P(X=3k) + P(X=3k+1) + P(X=3k+2) \quad (\text{événements deux-à-deux disjoints}) \\ &= q^{3k}p + q^{3k+1}p + q^{3k+2}p \\ &= q^{3k}(p + qp + q^2p) \end{aligned}$$

   On note alors $r = p + qp + q^2p$. On remarque que :

$$r = p(1+q+q^2) = (1-q)(1+q+q^2) = 1 + q + q^2 - q - q^2 - q^3 = 1 - q^3$$

   De plus : $q^{3k} = (q^3)^k = (1-r)^k$. On a donc :

$$\boxed{P(Q=k) = (1-r)^k r}$$

   Enfin : $r = 1 - q^3$ et $q \in]0;1[$ donc $\boxed{r \in]0;1[}$ Bilan : Q suit la $\boxed{\text{loi } BN(r) \text{ avec } r = 1-q^3}$

3. Montrer que $P(R=0) = \dfrac{1}{1+q+q^2}$, $P(R=1) = \dfrac{q}{1+q+q^2}$ et $P(R=2) = \dfrac{q^2}{1+q+q^2}$.
   L'événement $[R = 0]$ est réalisé si et seulement si :
   - X vaut 0 (et dans ce cas Q vaut 0)
   - ou bien X vaut 3 (et dans ce cas Q vaut 1)
   - ou bien X vaut 6 (et dans ce cas Q vaut 2)
   - $\vdots$

On a donc :

$$\begin{aligned}
P(R=0) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}[X=3k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=3k) \quad (\sigma-\text{additivité de la probabilité}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} q^{3k}p \\
&= p\sum_{k=0}^{+\infty}(q^3)^k \\
&= p \times \frac{1}{1-q^3} \quad (\text{série géométrique}) \\
&= (1-q) \times \frac{1}{(1-q)(1+q+q^2)} \\
&= \boxed{\frac{1}{1+q+q^2}}
\end{aligned}$$

On obtient de même :

$$P(R=1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=3k+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{3k+1}p = q\sum_{k=0}^{+\infty} q^{3k}p = qP(R=0) = \boxed{\frac{q}{1+q+q^2}}$$

et par le même raisonnement encore :

$$P(R=2) = q^2P(R=0) = \boxed{\frac{q^2}{1+q+q^2}}$$

Bilan : pour tout $j \in R(\Omega)$: $\boxed{P(R=j) = \frac{q^j}{1+q+q^2}}$

4. Vérifier que les variables Q et R sont indépendantes.
Soient $i \in Q(\Omega)$ et $j \in R(\Omega)$. Il s'agit de montrer que :

$$P([Q=i] \cap [R=j]) = P(Q=i) \times P(R=j)$$

Par unicité de la division euclidienne de $3i+j$ par 3, on a :

$$[Q=i] \cap [R=j] = [X=3i+j]$$

Donc :

$$P([Q=i] \cap [R=j]) = P(X=3i+j) = q^{3i+j}p$$

D'autre part, d'après les formules trouvées en question 2.b et 3 :

$$P(Q=i) \times P(R=j) = q^{3i}p(1+q+q^2) \times \frac{q^j}{1+q+q^2} = q^{3i+j}p$$

On a donc bien :

$$\boxed{P([Q=i] \cap [R=j]) = P(Q=i) \times P(R=j)}$$

Bilan : les variables aléatoires Q et R sont $\boxed{\text{indépendantes}}$

5. Simulation des variables X, Q et R.

a) Expliquer pourquoi la fonction suivante renvoie la valeur prise par X lors de l'expérience décrite en début d'exercice.

```
def simulX(p):
    X=rd.geometric(p) - 1
    return X
```

On note $Y = X + 1$. Y désigne le rang d'apparition du premier pile. Les lancers sont indépendants, et à chaque lancer la probabilité d'obtenir pile est p. Donc Y suit la loi géométrique de paramètre p. La commande `rd.geometric(p)` permet de simuler Y, et on utilise ensuite : $X = Y - 1$.

b) Compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle renvoie les valeurs prises respectivement par X, Q et R.

```
def div(p):
    X=simulX(p)
    Q = X//3
    R =  X%3
    return (X,Q,R)
```

Problème EDHEC 2016

Partie 1 : résultats préliminaires

1. Pour chaque entier naturel n, on considère une matrice A_n de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté $a_{i,j}(n)$, ainsi qu'une matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $a_{i,j}$.
On suppose que la suite de matrices (A_n) converge vers la matrice A, c'est à dire que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!], \lim_{n\to+\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}$$

Soient B et C deux autres matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, indépendantes de n.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} BA_n = BA$. On admet que ceci reste vrai si B appartient à $\mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$.
On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_nC = AC$ et que ceci reste vrai si C appartient à $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
On admet également que $\lim\limits_{n\to+\infty} BA_nC = BAC$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!]$, le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de BA_n est donné par : $\sum\limits_{k=1}^{4} b_{i,k}a_{k,j}(n)$ et par somme finie de limites, on a : $\left(\sum\limits_{k=1}^{4} b_{i,k}a_{k,j}(n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\sum\limits_{k=1}^{4} b_{i,k}a_{k,j}\right)$ qui n'est rien d'autre que le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de BA.
Conclusion : on a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} BA_n = BA$.

2. Montrer que, si une matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est telle que, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{4} a_{i,j}$ est une constante c, alors c est une valeur propre de A.

En considérant la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a dans ce cas $AX = cX$. c est donc bien une valeur propre de A.

3. Montrer que si une matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors la somme de ses valeurs propres, (chacune étant comptée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé)

est égale à la trace de A.

On utilise le résultat bien connu : pour toutes matrices M et N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $Tr(MN) = Tr(NM)$ que l'on redémontre ici :

$$Tr(MN) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} n_{k,i}m_{i,k} = Tr(NM)$$

Or, si A est diagonalisable il existe une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ constituées des valeurs propres de A et une matrice inversible P telles que : $A = PDP^{-1}$. On a alors : $Tr(A) = Tr(PDP^{-1}) = Tr(DPP^{-1}) = Tr(D) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i$ d'après le résultat redémontré précédemment.
Conclusion : Si A est diagonalisable alors $Tr(A)$ est égal à la somme de ses valeurs propres.

Partie 2 : Étude de la matrice d'une chaîne de Markov

On considère deux urnes U et V contenant chacune 3 boules. Au départ, l'urne U contient 3 boules blanches et l'urne V contient 3 boules noires.
On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autrre urne (un tirage est un échange de 2 boules).
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient U avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage (c'est à dire après le $n^{\text{ème}}$ échange) et on a donc $X_0 = 3$.
On considère le vecteur ligne $L_n = (P(X_n = 0)\ P(X_n = 1)\ P(X_n = 2)\ P(X_n = 3))$.

4. Pour tout couple (i, j) éléments de $[\![0, 3]\!]$ et tout entier $n \geqslant 3$, déterminer $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$.
Tout d'abord, il faut remarquer que, les tirages étant des échanges, il y a toujours 3 boules dans chaque urnes. De plus, si l'urne U contient i boules blanches alors elle contient aussi $(3-i)$ boules noires et dans ce cas l'urne V contient i boules noires et $(3-i)$ boules blanches.
• Si l'urne U contient 0 boule blanche alors un échange donnera nécessairement 1 boules blanche dans l'urne U.
Donc : $\boxed{P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1}$.
• Si l'urne U contient 3 boule blanche alors un échange donnera nécessairement 2 boules blanche dans l'urne U.
Donc : $\boxed{P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 2) = 1}$.
• Dans les autres cas, si l'urne U contient $i \in \{1, 2\}$ boules blanches alors au prochain tirage elle ne pourra en contenir que i, $i+1$ ou $i-1$.
Pour rester avec le même nombre i de boules dans U, il faut choisir une boule noire dans U et une boule noire dans V ou alors il faut choisir une boule blanche dans U et une boule blanche dans V. On a donc : $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i) = \frac{3-i}{3} \times \frac{i}{3} + \frac{i}{3} \times \frac{3-i}{3}$.
Soit : $\boxed{P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i) = \dfrac{2i(3-i)}{3^2}}$.
Pour augmenter le nombre de boules blanches d'une unité il faut choisir une boule noire dans U et une boule blanche dans V.
Donc : $\boxed{P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i+1) = \dfrac{(3-i)^2}{3^2}}$.
Pour diminuer le nombre de boules blanches d'une unité il faut choisir une boule blanche dans U et une boule noire dans V.
Donc : $\boxed{P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i-1) = \dfrac{i^2}{3^2}}$.

5. (a) Soient n un entier supérieur ou égal à 3 et M la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ dont l'élément de

la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne et de la $(j+1)^{\text{ème}}$ colonne est égal à $P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$. Justifier soigneusement que M est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice M est donnée par :

$$\begin{pmatrix} P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) & P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) & P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2) & P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=3) \\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) & P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) & P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) & P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=3) \\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0) & P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) & P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) & P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3) \\ P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=0) & P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1) & P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2) & P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=3) \end{pmatrix}$$

Soit, d'après la question précédente :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est bien la matrice donnée à la question 12.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3,\ L_{n+1} = L_n M$ (le résultat est admis pour $n = 0, 1$ et 2).

Pour tout $j \in [\![0,3]\!]$, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X_n = i)_{0 \leqslant i \leqslant 3})$, on a :

$$P(X_{n+1}=j) = P(X_n=0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=j) + P(X_n=1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=j) + P(X_n=2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=j) + P(X_n=3)P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=j)$$

L'égalité demandée est donc vraie pour le $(j+1)^{\text{ème}}$ coefficient de L_{n+1}. Or, ceci étant vrai pour tout j, on bien :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 3,\ L_{n+1} = L_n M \text{ (admis pour } n = 0, 1 \text{ et } 2)}$$

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = L_0 M^n$.

Par une simple récurrence immédiate.

6. (a) Montrer sans calcul que 1 est valeur propre de M.

La somme des coefficients d'une ligne de M vaut toujours 1, donc d'après la question 2., 1 est valeur propre de M.

(b) On considère les vecteurs $E_1 = (9\ -1\ -1\ 9)$ et $E_2 = (3\ 1\ -1\ -3)$.
Montrer que ${}^tE_1$ et ${}^tE_2$ sont vecteurs propres de M et donner les valeurs propres associées.

Un simple calcul donne :

$$\boxed{M\,{}^tE_1 = \frac{-1}{9}\,{}^tE_1 \quad \text{et} \quad M\,{}^tE_2 = \frac{1}{3}\,{}^tE_2}$$

Donc ${}^tE_1$ est bien un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\frac{-1}{9}$ et ${}^tE_2$ est bien un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\frac{1}{3}$.

(c) Montrer que, si M est diagonalisable, alors M possède une quatrième valeur propre λ que l'on déterminera. Vérifier que λ est effectivement valeur propre de M et conclure que M est diagonalisable.

Si M est diagonalisable alors, d'après la question 3., la somme des valeurs propres de M doit être égale à $Tr(M) = \frac{8}{9}$. On a déjà 3 valeurs propres de M, la dernière λ vérifie donc : $1 + \frac{-1}{9} + \frac{1}{3} + \lambda = \frac{8}{9}$ et donc $\lambda = \frac{-1}{3}$.

Montrons que $M + \frac{1}{3}I_4$ n'est pas inversible ou, ce qui revient au même, montrons que $A = 9\left(M + \frac{1}{3}I_4\right)$ n'est pas inversible :

On a : $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Les étapes successives suivantes : $\begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array}$ donnent la matrice : $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas inversible, donc A n'est pas inversible.

Conclusion : $\lambda = \frac{-1}{3}$ est bien valeur propre de M qui possède alors 4 valeurs propres distinctes et est donc bien diagonalisable.

Remarque : pour montrer que A n'est pas inversible, on aurait pu aussi montrer que : $C_2 - 3C_1 - C_3 + 3C_4 = 0$

Partie 3 : Recherche d'une loi stationnaire

7. Justifier qu'il existe une matrice Q inversible, dont la première colonne ne contient que des "1", et une matrice D diagonale telle que $M = QDQ^{-1}$.

   D'après la question précédente, M est diagonalisable. De plus un vecteur propre associé à la valeur propre 1 est le vecteur ne contenant que des "1" (voir question 2.). Il existe donc une matrice inversible Q (constituée de vecteurs propres dont le premier peut être le vecteur propre ne contenant que des "1") et une matrice diagonale $D = \text{diag}\left(1 \ \frac{-1}{9} \ \frac{1}{3} \ \frac{-1}{3}\right)$ telles que $M = QDQ^{-1}$.

8. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

   Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = QD^nQ^{-1}$. Or, D étant diagonale, on a $D^n = \text{diag}\left(1 \ \left(\frac{-1}{9}\right)^n \ \frac{1}{3^n} \ \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right)$.

   De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{9}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{9}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = \text{diag}(1\ 0\ 0\ 0)$ et d'après les résultats admis dans les préliminaires :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} M^n = Q\text{diag}(1\ 0\ 0\ 0)Q^{-1}}$$

9. Soit $L = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ la première ligne de Q^{-1}.

   (a) En utilisant la relation $Q^{-1}M = DQ^{-1}$, montrer que : $\ell_1 = \ell_4$ et $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$.

   De $M = QDQ^{-1}$ on tire $Q^{-1}M = DQ^{-1}$, soit :

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

   En identifiant chaque coefficient de la première ligne du résultat de ces produits, on obtient alors :

$$\begin{cases} & \frac{1}{9} \times \ell_2 & & & = \ell_1 \\ \ell_1 & +\frac{4}{9}\ell_2 & +\frac{4}{9}\ell_3 & & = \ell_2 \\ & \frac{4}{9}\ell_2 & +\frac{4}{9}\ell_3 & +\ell_4 & = \ell_3 \\ & & \frac{1}{9}\ell_3 & & = \ell_4 \end{cases}$$

De L_1 et L_4 on tire : $\boxed{\ell_2 = 9\ell_1}$ et $\boxed{\ell_3 = 9\ell_4}$ et de $L_2 - L_3$: $\boxed{\ell_1 - \ell_4 = \ell_2 - \ell_3}$ et on a alors bien :

$$\boxed{\ell_1 = \ell_4 \quad \text{et} \quad \ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4}$$

(b) Conclure, en considérant le produit $Q^{-1}Q$, que $\ell_4 = \dfrac{1}{20}$.

On a $Q^{-1}Q = I_4$ et d'après 7., la première colonne de Q ne contient que des "1", donc :

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc : $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = 1$, mais comme $\ell_1 = \ell_4$ et $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$ cela revient alors à : $\ell_4 + 9\ell_4 + 9\ell_4 + \ell_4 = 1$ donc :

$$\boxed{\ell_4 = \frac{1}{20}}$$

10. Déduire de ce qui précède les 16 coefficients de la matrice $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = Q\,\mathrm{diag}(1\ 0\ 0\ 0)Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = \begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \end{pmatrix}$$

Or, $\ell_1 = \ell_4 = \frac{1}{20}$ et $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}}$$

11. On considère une autre expérience aléatoire qui consiste à tirer 3 boules, une par une et sans remise, dans une urne qui en contient 6, dont 3 sont blanches et 3 sont noires.
On note B_k (resp. N_k) l'événement « obtenir une boule blanche (resp. noire) au $k^{\text{ème}}$ tirage » et X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

(a) Quelle est la loi de X ?

Tout d'abord, on a : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Utilisons les événements suggérés par l'énoncé :
$(X = 0) = N_1 \cap N_2 \cap N_3$, donc par la formule des probabilités composées :
$P(X = 0) = P(N1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1\cap N_2}(N_3) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.
De même : $(X = 1) = (B_1 \cap N_2 \cap N_3) \sqcup (N_1 \cap B_2 \cap N_3) \sqcup (N_1 \cap N_2 \cap B_3)$ et par incompatibilité et par la formule des probabilités composées :
$P(X = 1) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 3 \times \frac{18}{120} = \frac{9}{20}$.
Pour $(X = 3) = B_1 \cap B_2 \cap B_3$, on trouve alors $P(X = 3) = \frac{1}{20}$ et
$P(X = 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 3) = 1 - \frac{1}{20} - \frac{9}{20} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$.
Conclusion : la loi de X est donnée par :

$$\boxed{P(X = 0) = \frac{1}{20},\ P(X = 1) = \frac{9}{20},\ P(X = 2) = \frac{9}{20},\ P(X = 3) = \frac{1}{20}}$$

(b) Vérifier que $\begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tM$, associé à la valeur propre 1.

On a : ${}^tM = \begin{pmatrix} 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 1 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/20 \\ 9/20) \\ 9/20 \\ 1/20 \end{pmatrix}$. Un simple calcul donne : ${}^tMV = V$, V est donc bien un vecteur propre de ${}^tM$ associé à la valeur propre 1.

(c) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers X.

Pour cela il suffit de montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = L = \left(\frac{1}{20}\ \frac{9}{20}\ \frac{9}{20}\ \frac{1}{20}\right)$.

Or, d'après 5.(c), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n = L_0 M^n$, avec $L_0 = (0\ 0\ 0\ 1)$ et grâce aux résultats admis dans les préliminaires, $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \lim\limits_{n\to+\infty} L_0 M^n = L_0 \left(\lim\limits_{n\to+\infty} M^n\right)$ mais d'après 10., $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$ un simple calcul montrer alors bien que $L_0 \left(\lim\limits_{n\to+\infty} M^n\right) = L$.

Conclusion : la suite (X_n) converge alors bien en loi vers X.