Lycée Louis Thuillier — Année 2026-2027
ECG2 Maths approfondies

Devoir surveillé 2 du 6/11/2026 - Type EML
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 5 pages

---

SUJET EML 2021

Exercice 1 EDHEC 2019

Partie 1 : étude d'un exemple

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.
   (b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
   (c) En `Python`, la commande `r=al.rank(M)` renvoie dans la variable `r` le rang de la matrice M. On a saisi :

```
A=np.array([[1,0,0],[-2,3,-2],[-1,1,0]])
r1=al.rank(A-np.eye(3))
r2=al.rank(A-2*np.eye(3))
print('r1=',r1)
print('r2='r2)
```

   `Python` a renvoyé :

```
r1 =
      1.
r2 =
      2.
```

   Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?
   (d) Donner une base de chacun des noyaux $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$.
2. (a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ et (v_2) une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.
   (b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2).

Partie 2 : généralisation

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres, λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_p, deux à deux distinctes.

On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id)$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D.
   (a) En notant I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :
   $$(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n)\dots(D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$
   (b) En déduire un polynôme annulateur de f.

Pour chaque k de $[\![1, p]\!]$, on définit le polynôme $L_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$

4. (a) En distinguant les cas $i = k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.
   (b) Montrer que $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
   (c) Établir alors que :
   $$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k$$
   (d) En déduire que $\sum_{i=1}^{p} L_i = 1$.
5. (a) Montrer que, pour tout x de E, $L_k(f)(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id)$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $L_k(f)$.
   (b) En déduire la décomposition cherchée.
6. Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$ et $p = 2$.

Exercice 2 EDHEC 2016

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.
On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. (a) Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.
   (b) Vérifier que chaque terme de la sutie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.
2. Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

```
u=1
n=0
while u>0.00001:
    u = exp(-u)/u
    n=n+1
print(n)
```

```
u=1
n=0
while u<100000:
    u = exp(-u)/u
    n=n+1
print(n)
```

3. (a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = e^{-x} - x^2$$
   (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

4. (a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.
   (b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

5. On pose : $h(x) = \begin{cases} (f\circ f)(x) & ,\text{si } x > 0 \\ 0 & ,\text{si } x = 0 \end{cases}$
   (a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.
   (b) Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

Exercice 3 : EDHEC 2023

On effectue des lancers d'une pièce donnant "pile" avec la probabilité $p \in]0,1[$ et "face" avec la probabilité $q = 1-p$.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note F_k l'évènement « obtenir "face" au k^e lancer » et on pose $P_k = \overline{F_k}$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de "face" obtenus avant le premier "pile".

1. a) Utiliser les évènements F_k et P_k pour déterminer la loi de X que l'on note désormais $BN(p)$.
   b) Calculer l'espérance et la variance de X.

2. Selon le principe de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$, on admet qu'il existe deux variables aléatoires Q et R définies sur le même espace probabilisé que X et telles que $X = 3Q + R$, avec $Q(\Omega) = \mathbb{N}$ et $R(\Omega) = \{0,1,2\}$.
   Par exemple, si X prend la valeur 5, alors Q prend la valeur 1 et R prend la valeur 2.
   a) Écrire, pour tout entier naturel k, l'évènement $(Q = k)$ a l'aide de la variable X.
   b) En déduire que Q suit la loi $BN(1-q^3)$.

3. Montrer que $P(R=0) = \dfrac{1}{1+q+q^2}$, $P(R=1) = \dfrac{q}{1+q+q^2}$ et $P(R=2) = \dfrac{q^2}{1+q+q^2}$.

4. Vérifier que les variables Q et R sont indépendantes.

5. Simulation des variables X, Q et R.
   a) Expliquer pourquoi la fonction suivante renvoie la valeur prise par X lors de l'expérience décrite en début d'exercice.

```
def simulX(p):
    X=rd.geometric(p) - 1
    return X
```

   b) Compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle renvoie les valeurs prises respectivement par X, Q et R.

```
def div(p):
    X=simulX(p)
    Q = ------
    R = ------
    return (X,Q,R)
```

Problème EDHEC 2016

Partie 1 : résultats préliminaires

1. Pour chaque entier naturel n, on considère une matrice A_n de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté $a_{i,j}(n)$, ainsi qu'une matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $a_{i,j}$.
On suppose que la suite de matrices (A_n) converge vers la matrice A, c'est à dire que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!],\ \lim_{n\to+\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}$$

Soient B et C deux autres matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, indépendantes de n.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} BA_n = BA$. On admet que ceci reste vrai si B appartient à $\mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$.
On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_nC = AC$ et que ceci reste vrai si C appartient à $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
On admet également que $\lim\limits_{n\to+\infty} BA_nC = BAC$.

2. Montrer que, si une matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est telle que, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{4} a_{i,j}$ est une constante c, alors c est une valeur propre de A.
3. Montrer que si une matrice A de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors la somme de ses valeurs propres, (chacune étant comptée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé) est égale à la trace de A.

Partie 2 : Étude de la matrice d'une chaîne de Markov

On considère deux urnes U et V contenant chacune 3 boules. Au départ, l'urne U contient 3 boules blanches et l'urne V contient 3 boules noires.
On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autrre urne (un tirage est un échange de 2 boules).
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient U avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage (c'est à dire après le $n^{\text{ème}}$ échange) et on a donc $X_0 = 3$.
On considère le vecteur ligne $L_n = (P(X_n = 0)\ P(X_n = 1)\ P(X_n = 2)\ P(X_n = 3))$.

4. Pour tout couple (i,j) éléments de $[\![0,3]\!]$ et tout entier $n \geqslant 3$, déterminer $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$.
5. (a) Soient n un entier supérieur ou égal à 3 et M la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ dont l'élément de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne et de la $(j+1)^{\text{ème}}$ colonne est égal à $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$. Justifier soigneusement que M est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3,\ L_{n+1} = L_nM$ (le résultat est admis pour $n = 0, 1$ et 2).
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = L_0M^n$.
6. (a) Montrer sans calcul que 1 est valeur propre de M.
   (b) On considère les vecteurs $E_1 = (9\ -1\ -1\ 9)$ et $E_2 = (3\ 1\ -1\ -3)$.
   Montrer que ${}^tE_1$ et ${}^tE_2$ sont vecteurs propres de M et donner les valeurs propres associées.
   (c) Montrer que, si M est diagonalisable, alors M possède une quatrième valeur propre λ que l'on déterminera. Vérifier que λ est effectivement valeur propre de M et conclure que M est diagonalisable.

Partie 3 : Recherche d'une loi stationnaire

7. Justifier qu'il existe une matrice Q inversible, dont la première colonne ne contient que des "1", et une matrice D diagonale telle que $M = QDQ^{-1}$.
8. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$.
9. Soit $L = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ la première ligne de Q^{-1}.
   (a) En utilisant la relation $Q^{-1}M = DQ^{-1}$, montrer que : $\ell_1 = \ell_4$ et $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$.
   (b) Conclure, en considérant le produit $Q^{-1}Q$, que $\ell_4 = \dfrac{1}{20}$.
10. Déduire de ce qui précède les 16 coefficients de la matrice $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n$.
11. On considère une autre expérience aléatoire qui consiste à tirer 3 boules, une par une et sans remise, dans une urne qui en contient 6, dont 3 sont blanches et 3 sont noires.
    On note B_k (resp. N_k) l'événement « obtenir une boule blanche (resp. noire) au $k^{\text{ème}}$ tirage » et X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
    (a) Quelle est la loi de X ?
    (b) Vérifier que $\begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tM$, associé à la valeur propre 1.
    (c) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers X.

Devoir surveillé 2 du 6/11/2026 - Type EML
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 6 pages

SUJET EML 2021

Problème 1

Partie A : Étude de deux suites

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

1. (a) Montrer que, pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}.$$

   (b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones, puis qu'elles convergent vers une même limite notée γ.

2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

3. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \gamma \leq v_n$, puis que

$$\left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

   (b) En déduire une fonction `Python` d'en-tête `def approx():` qui renvoie une approximation du réel γ à 10^{-5} près.

Partie B : Étude d'une fonction définie par une série

4. Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la série

$$\sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

converge. On pose alors, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

5. (a) Calculer $S(0)$ et vérifier que $S(1) = 1$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \right) = 2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{k}{n}}.$$

En déduire la valeur de $S\left(\frac{1}{2}\right)$.

6. (a) Montrer que, pour tous $x, y \in [0, +\infty[$,

$$S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}.$$

(b) En déduire que S est une fonction croissante sur $[0, +\infty[$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $h \neq 0$ et $x + h \in [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \leq |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

En déduire que S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

7. (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$S(x+1) = S(x) + \frac{1}{x+1}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(c) En utilisant la croissance de S sur $[0, +\infty[$, montrer que

$$S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x).$$

8. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \mathrm{d}x,$$

où le réel u_n est défini dans la partie A.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x - u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

(c) Conclure que

$$\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = \gamma.$$

Partie C (pour les cubes) : Application en probabilité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de densité f.

9. Montrer que f est une densité de probabilité.
10. (a) Déterminer la fonction de répartition de X.
    (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
11. On définit la variable aléatoire Y par

$$Y = X - \lfloor X \rfloor,$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

(a) Montrer, pour tout $x \in [0, 1[$, que

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(k \leq X \leq k + x),$$

puis que $\mathbb{P}(Y \leq x) = S(x)$.

(b) En déduire la fonction de répartition de Y.

(c) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de Y.

12. Justifier que Y admet une espérance puis, à l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\mathbb{E}(Y) = 1 - \gamma.$$

Problème 2

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et T un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On dit que la suite de polynômes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T lorsque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{k\to+\infty} T_k(x) = T(x).$$

Dans ce cas, on admet que si, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$T_k = \sum_{i=0}^{n} a_{k,i} X^i, \qquad (a_{k,0}, \ldots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

et si

$$T = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i, \qquad (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

alors, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{k,i} = b_i$.

Partie A : Étude d'endomorphismes de polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application φ_n sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \varphi_n(P) = XP - \frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)P' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2P''.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Calculer $\varphi_n(1)$ et vérifier :
   $$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \qquad \varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2}X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1}.$$
   (b) Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de φ_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$; ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
2. Cas $n = 2$:
   (a) Vérifier :
   $$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) Montrer que le spectre de A_2 est $\{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$. Justifier alors que A_2 est diagonalisable et déterminer les sous-espaces propres de A_2.
   (c) En déduire le spectre de φ_2 et une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ_2.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X-1)^n$ est un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $-\frac{1}{n}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Vérifier : $\forall i \in \{0,\dots,n\}, \quad \big(\varphi_n(X^i)\big)(1) = 1$.
   (b) En déduire que la somme des coefficients sur chaque colonne de A_n est égale à 1.
   (c) Montrer alors que 1 est une valeur propre de φ_n.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer :
   $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad (n+1)^2\varphi_{n+1}\big((X-1)P\big) = (X-1)\big(n^2\varphi_n(P) - P\big).$$
   (b) En déduire que si P est un vecteur propre de φ_n associé à une valeur propre λ, alors $(X-1)P$ est un vecteur propre de φ_{n+1} et préciser la valeur propre associée en fonction de λ.
6. (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{ \frac{-n + j(j+1)}{n^2} \,;\, j \in \{0,\dots,n\} \right\}.$$
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est diagonalisable et déterminer la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Π_n le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :
   $$\Pi_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 X^i.$$
   (a) À l'aide de la question 1.a., montrer : $\varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n$.

(b) En déduire le sous-espace propre de φ_n associé à la valeur propre 1.

8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On note, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, R_j un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $\lambda_j = \dfrac{-n + j(j+1)}{n^2}$.

(a) Justifier qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi_n^k(P) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (\lambda_j)^k R_j,$$

où φ_n^k désigne l'endomorphisme $\underbrace{\varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_n}_{k \text{ fois}}$.

(b) En déduire qu'il existe un réel α tel que la suite de polynômes $(\varphi_n^k(P))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le polynôme $\alpha \Pi_n$.

Partie B : Étude d'une expérience aléatoire

Dans cette partie, n désigne un entier de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne rouge et d'une urne bleue ainsi que de n boules rouges et de n boules bleues, ces $2n$ boules étant supposées indiscernables au toucher. Initialement, on place les n boules rouges dans l'urne rouge et les n boules bleues dans l'urne bleue.
On procède alors à une succession d'épreuves aléatoires, chaque épreuve consistant à échanger au hasard une boule de l'urne rouge avec une boule de l'urne bleue. Après chaque épreuve, chaque urne contient donc toujours n boules. On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Z_k égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne rouge à l'issue de la k-ième épreuve. On pose également $Z_0 = n$.
On pourra remarquer que, après chaque épreuve, le nombre de boules rouges dans l'urne rouge est toujours égal au nombre de boules bleues dans l'urne bleue.

9. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1.

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer : pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

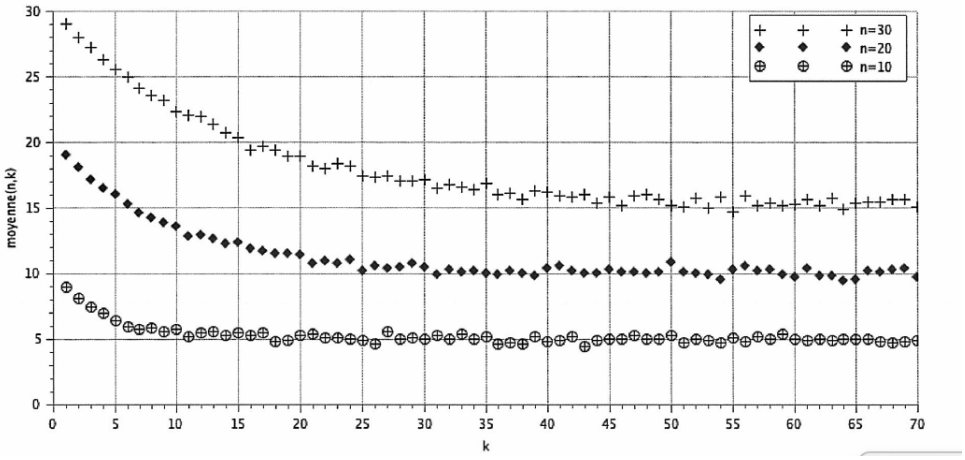
$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = i) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i-1) + 2\frac{i}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right)\mathbb{P}(Z_k = i) + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i+1).$$

11. (a) Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction `Python` suivante pour que, prenant en entrée le nombre n initial de boules rouges et le nombre k d'épreuves réalisées, elle renvoie une simulation de Z_k.

```
def simule(n,k):
        R=n #R désigne le nombre de boules rouges dans l'urne rouge
        for j in range(k):
                aleaR=rd.random()
                aleaB=rd.random()
                if aleaR<=(R/n) and aleaB<=(R/n) :
                        R=........
                elif ..........:
                        R=R+1
                return R
```

(b) Pour les cubes : Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def esperance(n,k):` qui, prenant en entrée le nombre n initial de boules rouges et le nombre k d'épreuves réalisées, renvoie une estimation de l'espérance de Z_k. On justifiera, en particulier, la méthode d'estimation.

(c) On utilise la fonction précédente et on trace l'espérance de Z_k en fonction de k pour différentes valeurs de n. On obtient le graphe ci-dessous, reconstitué ici de façon schématique.



Émettre une conjecture sur la valeur de la limite de l'espérance de Z_k lorsque k tend vers $+\infty$.

12. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta_k = Z_{k+1} - Z_k$.
   (a) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\Delta_k(\Omega)$.
   (b) Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\mathbb{P}(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i).$$
   (c) Montrer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\mathbb{E}(\Delta_k) = 1 - \frac{2}{n}\mathbb{E}(Z_k), \qquad \text{puis} \qquad \mathbb{E}(Z_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\mathbb{E}(Z_k) + 1.$$
   (d) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une expression de $\mathbb{E}(Z_k)$ en fonction de k et de n. Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{E}(Z_k)$ et commenter le résultat obtenu.
13. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme Q_k de $\mathbb{R}_n[X]$ par :
$$Q_k = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(Z_k = i) X^i.$$
   (a) À l'aide de la question 1.a., démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\varphi_n(Q_k) = Q_{k+1}$, où φ_n est l'endomorphisme étudié dans la partie A.
   (b) En déduire qu'il existe un réel α tel que la suite de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme $\alpha\Pi_n$, où Π_n est le polynôme défini à la question 7.
14. (a) Déduire de la question précédente : pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$,
$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(Z_k = i) = \alpha \binom{n}{i}^2.$$
   (b) On admet la formule suivante :
$$\forall (a, b, m) \in \mathbb{N}^3, \qquad \sum_{i=0}^{m} \binom{a}{i}\binom{b}{m-i} = \binom{a+b}{m}.$$
   Montrer : $\alpha = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.
   (c) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi et l'espérance.