Devoir surveillé 2 du 6/11/2026 - Type EML
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 6 pages

SUJET EML 2021

Problème 1

Partie A : Étude de deux suites

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

1. (a) Montrer que, pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}.$$

Soit $t \in]0, +\infty[$, la fonction ln est continue sur $[t, t+1]$ et dérivable sur $]t, t+1[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]t, t+1[$ tel que $\ln(t+1) - \ln(t) = (t+1-t)\ln'(c) = \frac{1}{c}$ or $0 < t < c < t+1$ donc par passage à l'inverse $\frac{1}{t+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{t}$.
Finalement $\boxed{\frac{1}{t+1} \leqslant \ln(t+1) - \ln(t) \leqslant \frac{1}{t}.}$

(b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones, puis qu'elles convergent vers une même limite notée γ.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1))$.
Or avec la question précédente en remplaçant t par $n+1 \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(n+2) - \ln(n+1) \leqslant \frac{1}{n+1}$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
De façon analogue, $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n))$.
Or avec la question précédente en remplaçant t par $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n)$ donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ donc la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
On remarque que

$$v_n - u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Nous avons montré que les suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et donc elles $\boxed{\text{convergent et ont la même limite}}$. On la note γ, dite constante d'Euler.

2. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante vers γ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante vers γ donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n \text{ donc } \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\leqslant\gamma\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n).$$

Par conséquent

$$\gamma+\ln(n)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\gamma+\ln(n+1).$$

Avec $n>1$, on peut diviser par $\ln(n)>0$,

$$\frac{\gamma}{\ln(n)}+1\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln(n)}\leqslant\frac{\gamma}{\ln(n)}+\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$

donc

$$\frac{\gamma}{\ln(n)}+1\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln(n)}\leqslant\frac{\gamma}{\ln(n)}+\frac{\ln(n)+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}=\frac{\gamma}{\ln(n)}+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}+1.$$

Il est clair que $\frac{\gamma}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\to}0$ et $\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\to}0$ donc par encadrement

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\to}1$$

finalement $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n).}$

3. (a) Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\leq\gamma\leq v_n$, puis que

$$\left|\frac{u_n+v_n}{2}-\gamma\right|\leq\frac{1}{2}(v_n-u_n).$$

On a déjà vu que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\leqslant\gamma\leqslant v_n$. Par inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{u_n+v_n}{2}-\gamma\right|=\left|\frac{u_n-\gamma}{2}+\frac{v_n-\gamma}{2}\right|\leqslant\frac{|u_n-\gamma|}{2}+\frac{|v_n-\gamma|}{2}.$$

Comme $u_n-\gamma\leqslant0$ on a $|u_n-\gamma|=\gamma-u_n$ et comme $0\leqslant v_n-\gamma$, on a $|v_n-\gamma|=v_n-\gamma$ donc

$$\boxed{\left|\frac{u_n+v_n}{2}-\gamma\right|\leqslant\frac{\gamma-u_n}{2}+\frac{v_n-\gamma}{2}=\frac{v_n-u_n}{2}}.$$

(b) En déduire une fonction `Python` d'en-tête `def approx():` qui renvoie une approximation du réel γ à 10^{-5} près.
On voit que $v_n-u_n=\ln(n+1)-\ln(n)$. On calcule le plus petit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$0\leqslant\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{2}\leqslant10^{-5}$$

avec une boucle `while`. Quand ce n est connu, on calcule $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ avec une opération pointée, on en déduit u_n,v_n puis $\frac{v_n+u_n}{2}$ qui est une approximation de γ telle que

$$\left|\frac{u_n+v_n}{2}-\gamma\right|\leqslant\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{2}\leqslant10^{-5}.$$

```
def approx():
        n=1
        S=1
        u=S-np.log(2)
        v=S
        while 0.5*(log(n+1)-log(n))>10^(-5):
                n=n+1
                S=S+1/n
                u=S-np.log(n+1)
                v=S-np.log(n)
        return (u+v)/2
```

Partie B : Étude d'une fonction définie par une série

4. Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la série

$$\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$$

converge. On pose alors, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$S(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right).$$

Soit $x \geqslant 0, k \in \mathbb{N}^*$, le calcul donne $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}=\frac{x}{k(k+x)}$ comme $k+x \underset{k\to+\infty}{\sim} k$, on a $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$. La série de Riemann $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ converge car l'exposant est supérieur à 1, donc la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{x}{k^2}$ converge. Elle est à terme général positif donc par comparaison, la série $\boxed{\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right) \text{ converge}}$ aussi.

5. (a) Calculer $S(0)$ et vérifier que $S(1)=1$.

Pour $x=0, k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+0}=0$ donc $\boxed{S(0)=0.}$

Pour $x=1$, on applique un télescopage, soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\to} 1.$$

Donc $\boxed{S(1)=1.}$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=2-2\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k}=2-\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}}.$$

En déduire la valeur de $S\left(\frac{1}{2}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k+1},$$

de façon classique, j'ajoute les termes d'indices pairs

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}}_{=\sum_{j=2}^{2n+1}\frac{1}{j}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\Big),$$

on développe puis isole le terme le terme en $k=1$ du premier sigma

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\left(\sum_{j=2}^{2n+1}\frac{1}{j}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{j=2}^{2n+1}\frac{1}{j}=2+2\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=2}^{2n+1}\frac{1}{j}\right).$$

On simplifie

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=2-2\sum_{j=n+1}^{2n+1}\frac{1}{j}.}$$

On poursuit

$$2-2\sum_{j=n+1}^{2n+1}\frac{1}{j}=2-\frac{2}{2n+1}-2\sum_{j=n+1}^{2n}\frac{1}{j},$$

on pense au changement de variable $k=n-j$,

$$2-2\sum_{j=n+1}^{2n+1}\frac{1}{j}=2-\frac{2}{2n+1}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=2-\frac{2}{2n+1}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(1+\frac{k}{n})},$$

finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=2-2\sum_{j=n+1}^{2n+1}\frac{1}{j}=2-\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}}}.$$

La dernière somme suggère l'usage des sommes de Riemann. La fonction $f:x\mapsto\frac{2}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$ comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas sur $[0,1]$. De sorte que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2}{1+x}\mathrm{d}x=[2\ln(1+x)]_0^1=2\ln(2).$$

On sait que $\frac{1}{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Finalement

$$\boxed{S\left(\frac{1}{2}\right)=2-2\ln(2)}.$$

6. (a) Montrer que, pour tous $x,y\in[0,+\infty[$,

$$S(y)-S(x)=(y-x)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)(k+y)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+y}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+y}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{y-x}{(k+x)(k+y)}=(y-x)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+x)(k+y)}.$$

On sait que $\frac{1}{(k+x)(k+y)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$ et $\sum \frac{1}{k^2}$ converge et comme $\frac{1}{k^2} > 0$, la série $\sum \frac{1}{(k+x)(k+y)}$ converge aussi. On peut donc faire tendre n vers $+\infty$.
Ainsi

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+y}\right)-\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)=S(y)-S(x)=(y-x)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)(k+y)}.$$

(b) En déduire que S est une fonction croissante sur $[0,+\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \leqslant y$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(k+x)(k+y)} > 0$ donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)} > 0$. Comme $y-x \geqslant 0$, on a $S(y)-S(x) \geqslant 0$ donc **la fonction S est croissante sur $\mathbb{R}^+$.**

(c) Montrer que, pour tout $x \in [0,+\infty[$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $h \neq 0$ et $x+h \in [0,+\infty[$,

$$\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\right| \leq |h|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}.$$

En déduire que S est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad S'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+, h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \geqslant 0$, on a

$$\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\right| = \left|\frac{1}{h}\times h\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)(k+x+h)}}_{\text{avec Q6(a)}}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)(k+x+h)}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\right| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k+x-(k+x+h)}{(k+x)^2(k+x+h)}\right| = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|h|}{(k+x)^2(k+x+h)}.$$

On a $k+x+h \geqslant k > 0$ et $k+x \geqslant k > 0$ donc $0 < \frac{1}{(k+x)^2(k+x+h)} \leqslant \frac{1}{k^3}$ donc en multipliant par $|h| \geqslant 0, 0 \leqslant \frac{|h|}{(k+x)^2(k+x+h)} \leqslant \frac{|h|}{k^3}$. Il reste à sommer sachant que la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^3}$ converge. Finalement

$$\boxed{\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\right| \leqslant |h|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}.}$$

Le terme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ est indépendant de h donc $|h|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{h\to0}{\to} 0$, comme une valeur absolue est toujours positive, par encadrement,

$$\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\right| \underset{h\to0}{\to} 0.$$

Le terme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$ est indépendant de h donc $\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \underset{h\to 0}{\to} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$. Donc le taux d'accroissement de S en x évalué en $x+h$ a une limite finie quand $h \to 0$ donc S est dérivable en x et $\boxed{S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.}$ C'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, donc S est $\boxed{\text{dérivable sur } \mathbb{R}^+}$.

7. (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$S(x+1) = S(x) + \frac{1}{x+1}.$$

Soit $x \geqslant 0$, la question 6(a) donne

$$S(x+1)-S(x) = (x+1-x)\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+x+1)-(k+x)}{(k+x)(k+x+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right)$$

L'erreur ici serait d'écrire $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+x}$ car cette série diverge. Donc on utilise les sommes partielles, soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+x+1}$$

par télescopage. Ainsi $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+x+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{1+x}$.

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) = \frac{1}{1+x}$. Donc $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{1+x}$. Finalement

$$\boxed{S(x+1) = S(x) + \frac{1}{1+x}.}$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{H}_n : S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

- Pour $n = 1$, la question 5(a) donne $S(1) = 1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$. Donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{H}_n$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$, avec la question 7(b), on a $S(n+1) = S(n) + \frac{1}{n+1}$ donc avec $\mathcal{H}_n$,

$$S(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Finalement $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$

(c) En utilisant la croissance de S sur $[0, +\infty[$, montrer que

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x).$$

Soit $x > 2$, on sait qu'avec la partie entière, $1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc avec la croissance de S, on a

$$S\left(\lfloor x \rfloor\right) \leqslant S\left(x\right) \leqslant S\left(\lfloor x \rfloor + 1\right).$$

Donc avec 7(b)

$$\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k} \leqslant S\left(x\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1} + \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}.$$

On divise par $\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k} > 0$,

$$1 \leqslant \frac{S\left(x\right)}{\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{\left(\lfloor x \rfloor + 1\right) \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}} + 1.$$

On a $\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k} \geqslant 1$ donc $\left(\lfloor x \rfloor + 1\right) \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k} \geqslant \lfloor x \rfloor + 1 \geqslant \lfloor x \rfloor > 0$ donc $0 < \frac{1}{\left(\lfloor x \rfloor+1\right) \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$ donc par encadrement

$$\frac{1}{\left(\lfloor x \rfloor + 1\right) \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

donc on a montré que $\frac{S(x)}{\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}} \underset{x \to +\infty}{\to} 1$ et $S\left(x\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}$.

La question 2 donne alors $S\left(x\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln\left(\lfloor x \rfloor\right)$.

Sachant que ln est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ qui implique $0 \leqslant \ln\left(\lfloor x \rfloor\right) \leqslant \ln\left(x\right) \leqslant \ln\left(\lfloor x \rfloor + 1\right)$. Avec $x > 2$, on a $\lfloor x \rfloor > 1$ donc $\ln\left(\lfloor x \rfloor\right) > 0$, et

$$1 \leqslant \frac{\ln\left(x\right)}{\ln\left(\lfloor x \rfloor\right)} \leqslant \frac{\ln\left(\lfloor x \rfloor + 1\right)}{\ln\left(\lfloor x \rfloor\right)} = \frac{\ln\left(\lfloor x \rfloor\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)}{\ln\left(\lfloor x \rfloor\right)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)}{\ln\left(\lfloor x \rfloor\right)}.$$

Une fois de plus par encadrement on a $\frac{\ln(x)}{\ln(\lfloor x \rfloor)} \underset{x \to +\infty}{\to} 1$ donc $\ln\left(x\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln\left(\lfloor x \rfloor\right)$. Finalement

$$\boxed{S\left(x\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln\left(x\right)}.$$

8. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \mathrm{d}x,$$

où le réel u_n est défini dans la partie A.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{k+x}$ est continue sur $[0,1]$ comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas donc on peut intégrer $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ selon x sur $[0,1]$, la somme étant finie. La linéarité de l'intégration donne

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \int_0^1 1 \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{1}{k+x} \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \left[\ln(k+x)\right]_0^1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$$

donc par télescopage

$$\boxed{\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = u_n}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x - u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

La fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ donc continue sur $[0,1]$, soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x - u_n = \int_0^1 \left(S(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{k(k+x)}\right)\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k(k+x)}\right)\right) \mathrm{d}x.$$

Avec $0 \leqslant x$, $k \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < k^2 \leqslant k(k+x)$ donc $0 < \frac{1}{k(k+x)} \leqslant \frac{1}{k^2}$, donc en sommant sachant que les séries convergent

$$0 < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+x)} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

ainsi

$$0 \leqslant x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+x)} \leqslant x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

On intègre selon x sur $[0,1]$ avec $0 < 1$,

$$0 \leqslant \int_0^1 x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+x)} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^1 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Finalement

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 S(x)\mathrm{d}x - u_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}.$$

(c) Conclure que

$$\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = \gamma.$$

La quantité $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est le reste d'une série convergente donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

donc

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x - u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Comme $\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x$ est indépendant de n, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 S(x)\mathrm{d}x$, l'unicité de la limite assure avec 1(b) que

$$\boxed{\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = \gamma.}$$

Partie C (pour les cubes) : Application en probabilité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de densité f.

9. Montrer que f est une densité de probabilité.

   La fonction f est définie et positive sur $\mathbb{R}$.
   Sur $]-\infty, 1[$, f est constante donc continue.
   Sur $[1, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ donc f est continue sur $[1, +\infty[$ comme carré de la fonction inverse.
   Soit $A > 1$, on a

$$\int_{-\infty}^A f(t)\mathrm{d}t = \int_1^A f(t)\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^A = -\frac{1}{A} + 1 \underset{A\to+\infty}{\to} 1.$$

   Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge est vaut 1.
   Finalement $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$

10. (a) Déterminer la fonction de répartition de X.

   Soit $x < 1$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x 0\mathrm{d}t = 0.$
   Soit $1 \leqslant x$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1.$
   Bilan :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{x} & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}}$$

   (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

   X est à densité donc X a une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge absolument.
   Or, pour $t > 1$, $tf(t) = \frac{1}{t}$ et on sait que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge donc X n'a pas d'espérance.

11. On définit la variable aléatoire Y par

$$Y = X - \lfloor X \rfloor,$$

   où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

(a) Montrer, pour tout $x \in [0,1[$, que

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(k \leq X \leq k+x),$$

puis que $\mathbb{P}(Y \leq x) = S(x)$.

Une densité f de X est nulle sur $]-\infty,1[$ donc on peut considérer $X(\Omega) = [1,+\infty[$ donc $\lfloor X \rfloor(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $\{[\lfloor X \rfloor = k]\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc, pour tout $x \in [0,1[$,

$$P\left(Y \leqslant x\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left([\lfloor X \rfloor = k] \cap [Y \leqslant x]\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left([\lfloor X \rfloor = k] \cap [X - \lfloor X \rfloor \leqslant x]\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P\left([\lfloor X \rfloor = k] \cap [X \leqslant \lfloor X \rfloor + x]\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left([\lfloor X \rfloor = k] \cap [X \leqslant k+x]\right).$$

On sait que $[\lfloor X \rfloor \leqslant X]$ est certain donc

$$P\left(Y \leqslant x\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left([\lfloor X \rfloor = k] \cap [k \leqslant X \leqslant k+x]\right).$$

Comme $0 \leqslant x < 1$, si $w \in [k \leqslant X \leqslant k+x]$ alors $k \leqslant X(w) \leqslant k+x$ donc $k \leqslant X(w) \leqslant k+x < k+1$ donc nécessairement $\lfloor X(w) \rfloor = k$ donc $w \in [\lfloor X \rfloor = k]$ donc $[k \leqslant X \leqslant k+x] \subset [\lfloor X \rfloor = k]$ et $[\lfloor X \rfloor = k] \cap [k \leqslant X \leqslant k+x] = [k \leqslant X \leqslant k+x]$.

Finalement

$$\boxed{P\left(Y \leqslant x\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(k \leqslant X \leqslant k+x\right)}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leqslant k \leqslant k+x$ donc

$$P\left(k \leqslant X \leqslant k+x\right) = F(x+k) - F(k) = -\frac{1}{k+x} + 1 - \left(-\frac{1}{k} + 1\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$$

donc par somme avec des séries qui convergent

$$\boxed{P\left(Y \leqslant x\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) = S(x)}.$$

(b) En déduire la fonction de répartition de Y.

On note F_Y la fonction de répartition de Y. On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1$. Or $Y = X - \lfloor X \rfloor$ donc $Y(\Omega) \subset [0,1[$. On en déduit

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ S(x) & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}}$$

(c) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de Y.

Sur les intervalles $]-\infty,0[,]0,1[,]1;+\infty[$, la fonction F_Y est est C^1 donc continue car c'est le cas des fonctions constantes et de S sur $[0,1]$.

En 0, on a $\lim\limits_{0^-} F_Y = \lim\limits_{0^-}(0) = 0$ et $\lim\limits_{0^+} F_Y = \lim\limits_{0^+}(S) = S(0) = 0 = F_Y(0)$ (question 5(a)) donc F_Y est continue en 0.

En 1, on a $\lim_{1^-} F_Y = \lim_{1^-}(S) = S(1) = 1$ (question 5(a)) et $\lim_{1^+} F_Y = \lim_{1^+}(1) = 1 = F_Y(1)$ donc F_Y est continue en 1.
Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. Finalement $\boxed{Y \text{ est à densité.}}$ On a une densité de Y en dérivant F_Y là où elle est C^1 et en imposant des valeurs positives en 0 et 1, par exemple, on propose avec la question 6(c),

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}}.$$

En 0 et en 1, j'ai imposé les valeurs $S'(0)$ et $S'(1)$ qui sont positives ainsi f_Y est continue sur $[0, 1]$.

12. Justifier que Y admet une espérance puis, à l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\mathbb{E}(Y) = 1 - \gamma.$$

On a vu que $Y(\Omega) \subset [0, 1[$ donc le support de Y est borné et Y admet une espérance. Et

$$E(Y) = \int_0^1 x f_Y(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 x S'(x) \mathrm{d}x.$$

On pose $u(x) = x, u'(x) = 1$ et $v = S$, ces fonctions sont C^1 sur $[0, 1]$ et par intégartion par parties,

$$E(Y) = [xS(x)]_0^1 - \int_0^1 S(x) \mathrm{d}x = S(1) - 0 - \gamma$$

avec la question 8(c). Finalement Y a une espérance et elle vaut $\boxed{E(Y) = 1 - \gamma.}$

Problème 2

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et T un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On dit que la suite de polynômes $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T lorsque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{k\to+\infty} T_k(x) = T(x).$$

Dans ce cas, on admet que si, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$T_k = \sum_{i=0}^{n} a_{k,i} X^i, \qquad (a_{k,0}, \ldots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

et si

$$T = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i, \qquad (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

alors, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $\lim_{k\to+\infty} a_{k,i} = b_i$.

Partie A : Étude d'endomorphismes de polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application φ_n sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \varphi_n(P) = XP - \frac{1}{n^2}\big((2n-1)X+1\big)(X-1)P' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2P''.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Calculer $\varphi_n(1)$ et vérifier :

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \qquad \varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2}X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1}.$$

On a $e_0' = e_0'' = \theta$, le polynôme nul. Donc $\varphi_n(e_0) = \varphi_n(1) = Xe_0(X)$ donc $\boxed{\varphi_n(1) = X.}$
Et comme $e_1' = 1, e_1'' = \theta$ donc

$$\varphi_n(X) = Xe_1 - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)e_1' = \frac{1}{n^2}\left(n^2X^2 - (2n-1)X^2 - X + (2n-1)X + 1\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left((n^2-2n+1)X^2 + (2n-2)X + 1\right) = \frac{1}{n^2}\left((n-1)^2X^2 + 2(n-1)X + 1\right).$$

Soit $i \in [\![2,n]\!]$, $e_i' = ie_{i-1}, e_i'' = i(i-1)e_{i-2}$ donc

$$\varphi_n(X^i) = Xe_i - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)e_i' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2e_i''$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n^2X^{i+1} - \left((2n-1)X^2 + X - (2n-1)X - 1\right)iX^{i-1} + (X^3 - 2X^2 + X)i(i-1)X^{i-2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n^2X^{i+1} - (2n-1)iX^{i+1} + (2n-2)iX^i + iX^{i-1} + (X^3 - 2X^2 + X)i(i-1)X^{i-2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left((n^2 - 2ni + i + i^2 - i)X^{i+1} + (2ni - 2i - 2i^2 + 2i)X^i + iX^{i-1} + i(i-1)X^{i-1}\right)$$

donc

$$\boxed{\varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2}X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1}}$$

Cette formule reste valable quand on remplace i par 1.

(b) Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
On va montrer que φ_n est linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Soit A, B dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation,

$$\varphi_n(\alpha A + B) = X(\alpha A + B) - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)(\alpha A+B)' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2(\alpha A+B)''$$

$$= X(\alpha A) - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)(\alpha A)' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2(\alpha A)''$$
$$+XB(X) - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)(B)' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2(B)''$$
$$= \alpha\varphi_n(A) + \varphi_n(B).$$

Montrons que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ_n, pour cela on montre que les images par φ_n d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$ sont dans $\mathbb{R}_n[X]$. On prend la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

- $\varphi_n(1) = X \in \mathbb{R}_n[X]$.
- Soit $i \in [\![1, n-1]\!], \varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2}X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1} \in \mathbb{R}_n[X]$ car $i+1 \leqslant n$ donc X^{i+1}, X^{i-1}, X^i sont dans $\mathbb{R}_n[X]$.

- $\varphi_n(X^n) = \frac{(n-n)^2}{n^2}X^{n+1} + \frac{2n(n-n)}{n^2}X^n + \frac{n^2}{n^2}X^{n-1} = X^{n-1} \in \mathbb{R}_n[X]$.

Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ_n, finalement $\boxed{\varphi_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de φ_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$; ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

2. Cas $n = 2$:

(a) Vérifier :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

On fixe dans cette question $n = 2$.

- $\varphi_2(1) = X$.
- $\varphi_2(X^1) = \frac{(2-1)^2}{2^2}X^{1+1} + \frac{2(2-1)}{2^2}X^1 + \frac{1^2}{2^2}X^{1-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}X^2$.
- $\varphi_2(X^2) = X^{2-1} = X$.

On retrouve bien A_2 en mettant en colonnes les coordonnées de ces images dans la base $(1, X, X^2)$.

(b) Montrer que le spectre de A_2 est $\{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$. Justifier alors que A_2 est diagonalisable et déterminer les sous-espaces propres de A_2.

On sait que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A_2 si et seulement si $A_2 - \lambda I_3$ est non inversible. Pour le prouver on résout $(A_2 - \lambda I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il y a une solution $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nulle si et seulement si λ est valeur propre de A_2, on a, au passage, une base du sous-espace propre (SEP) associé à λ.

- $\lambda = -\frac{1}{2}$,

$$\left(A_2 + \frac{1}{2}I_3\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b \\ a + b + c \\ \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow 2L_1}{\iff} \begin{pmatrix} a + \frac{1}{2}b \\ a + b + c \\ \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{pmatrix} a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b + c \\ \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a + \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il y a une solution non nulle donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A_2. Et SEP $\left(A_2, -\frac{1}{2},\right)$ est généré par un vecteur non nul donc il forme une base de ce SEP, on peut dire que $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est une base de SEP $\left(A_2, -\frac{1}{2}\right)$. En multipliant par -2 non nul, on peut aussi choisir $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme base de SEP $\left(A_2, -\frac{1}{2}\right)$.

- $\lambda = 0$,

$$(A_2 - 0I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}b \\ a + \frac{1}{2}b + c \\ \frac{1}{4}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} b \\ a + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il y a une solution non nulle donc 0 est valeur propre de A_2. Donc SEP $(A_2, 0)$ est généré par un vecteur non nul donc il forme une base de ce SEP, on peut dire que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de SEP $(A_2, 0)$.

- $\lambda = 1$,

$$(A_2 - I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + \frac{1}{4}b \\ a - \frac{1}{2}b + c \\ \frac{1}{4}b - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{pmatrix} -a + \frac{1}{4}b \\ -\frac{1}{4}b + c \\ \frac{1}{4}b - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -a + \frac{1}{4}b \\ -\frac{1}{4}b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Il y a une solution non nulle donc 1 est valeur propre de A_2. Donc SEP $(A_2, 1)$ est généré par un vecteur non nul donc il forme une base de ce SEP, on peut dire que $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ est une base de SEP $(A_2, 0)$. On peut aussi choisir $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A_2 a 3 valeurs propres donc $\boxed{A_2 \text{ est diagonalisable}}$ et ses SEP sont de dimension 1.

On a montré SEP $(A_2, 1) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, SEP $(A_2, 0) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, SEP $\left(A_2, -\frac{1}{2}\right) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) En déduire le spectre de φ_2 et une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ_2.

A_2 et φ_2 ont le même spectre. Pour obtenir une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ_2, on traduit dans $(1, X, X^2)$ les vecteurs propres de A_2 formant des bases des 3 SEP de A_2. Cela donne $\boxed{\left(1 - 2X + X^2, 1 - X^2, 1 + 4X + X^2\right)}$ comme base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ_2.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X-1)^n$ est un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $-\frac{1}{n}$.

Pour $n = 1$, $\varphi_1(X-1) = \varphi_1(X) - \varphi_1(1) = 1 - X = \frac{-1}{1}(X-1)$. Comme $X - 1$ n'est pas le polynôme nul, $X - 1$ est vecteur propre de φ_1 associé à $\frac{-1}{1} = -1$.

Soit $n \geqslant 2$, on a alors $((X-1)^n)' = n(X-1)^{n-1}$ et $((X-1)^n)'' = n(n-1)(X-1)^{n-2}$ donc

$$\varphi_n((X-1)^n) = X(X-1)^n - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)(X-1)\left((X-1)^n\right)' + \frac{1}{n^2}X(X-1)^2\left((X-1)^n\right)''$$

$$= X(X-1)^n - \frac{1}{n}((2n-1)X+1)(X-1)(X-1)^{n-1} + \frac{1}{n}X(X-1)^2(n-1)(X-1)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{n}(X-1)^n\left(nX - ((2n-1)X+1) + (n-1)X\right) = \frac{-1}{n}(X-1)^n.$$

Comme $(X-1)^n$ n'est pas le polynôme nul, $\boxed{(X-1)^n \text{ est vecteur propre de } \varphi_n \text{ associé à } \frac{-1}{n}.}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Vérifier : $\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \quad \left(\varphi_n(X^i)\right)(1) = 1$.

Pour $i = 0$, $\varphi_n(X^0) = X$ donc en évaluant en 1, on a bien $\left(\varphi_n(X^0)\right)(1) = 1$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2}X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2}X^i + \frac{i^2}{n^2}X^{i-1}$ donc en remplaçant X par 1, on a

$$\left(\varphi_n(X^i)\right)(1) = \frac{(n-i)^2}{n^2} + \frac{2i(n-i)}{n^2} + \frac{i^2}{n^2} = \frac{n^2 - 2ni + i^2 + 2ni - 2i^2 + i^2}{n^2} = 1.$$

(b) En déduire que la somme des coefficients sur chaque colonne de A_n est égale à 1.

Soit $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ une colonne de A_n, on sait que, pour un $i \in [\![0, n]\!]$, elle représente les coordonnées de $\varphi_n(X^i)$ dans la base $(1, X, ..., X^n)$ donc

$$\varphi_n(X^i) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

On évalue en 1 et on utilise la question précédente,

$$\left(\varphi_n(X^i)\right)(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k 1^k = \sum_{k=0}^{n} a_k = 1.$$

Donc $\boxed{\text{la somme des coeeficients de chaque colonne de } A_n \text{ est égale à } 1}$.

(c) Montrer alors que 1 est une valeur propre de φ_n.

Ce qui précède montre que ${}^tA_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ car les lignes de ${}^tA_n$ sont les colonnes de A_n et quand on multiplie ${}^tA_n$ par $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on additionne les termes ligne par ligne et on trouve toujours 1. Donc comme $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul, on voit que 1 est valeur propre de ${}^tA_n$ donc $\text{rg}({}^tA_n - I_n) < n+1$ donc $\text{rg}(A_n - I_n) < n+1$ car une matrice et sa transposée ont le même rang. Cela prouve que $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A_n \text{ donc de } \varphi_n}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad (n+1)^2 \varphi_{n+1}\big((X-1)P\big) = (X-1)\big(n^2\varphi_n(P) - P\big).$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.On a $((X-1)P)' = P + (X-1)P'$ et $((X-1)P)'' = 2P' + (X-1)P''$. Donc

$$(n+1)^2\varphi_{n+1}((X-1)P) = (n+1)^2X((X-1)P) - ((2n+1)X+1)(X-1)((X-1)P)' + X(X-1)^2((X-1)P$$
$$= (n+1)^2X((X-1)P) - ((2n+1)X+1)(X-1)(P+(X-1)P') + X(X-1)^2(2P'+(X-1)P'')$$
$$= (X-1)\left((n+1)^2XP - ((2n+1)X+1)(P+(X-1)P') + X(X-1)(2P'+(X-1)P'')\right)$$
$$= (X-1)\left(\left((n+1)^2X - ((2n+1)X+1)\right)P + \left(-((2n+1)X+1)(X-1) + 2X(X-1)\right)P'\right)$$
$$+(X-1)\left(X(X-1)(X-1)P''\right)$$
$$= (X-1)\left((n^2X-1)P + \left(-((2n+1)X+1) + 2X\right)(X-1)P' + X(X-1)^2P''\right)$$
$$= (X-1)\left((n^2X-1)P + \left((-2n+1)X-1\right)(X-1)P' + X(X-1)^2P''\right)$$
$$= (X-1)\left(n^2XP - \left((2n-1)X+1\right)(X-1)P' + X(X-1)^2P'' - P\right).$$

On retrouve bien

$$\boxed{(n+1)^2\varphi_{n+1}((X-1)P) = (X-1)\left(n^2\varphi_n(P) - P\right)}.$$

(b) En déduire que si P est un vecteur propre de φ_n associé à une valeur propre λ, alors $(X-1)P$ est un vecteur propre de φ_{n+1} et préciser la valeur propre associée en fonction de λ.
Supposons que P soit un vecteur propre de φ_n associé à λ alors $\varphi_n(P) = \lambda P$ et

$$(n+1)^2\varphi_{n+1}((X-1)P) = (X-1)\left(n^2\varphi_n(P) - P\right) = (X-1)\left(n^2\lambda P - P\right) = \left(n^2\lambda - 1\right)(X-1)P.$$

Comme $(n+1)^2 \neq 0$, on a

$$\varphi_{n+1}((X-1)P) = \frac{n^2\lambda - 1}{(n+1)^2}(X-1)P.$$

Comme P est vecteur propre de φ_n, P n'est pas le polynôme nul donc $(X-1)P$ n'est pas le polynôme nul et il est vecteur propre de φ_{n+1} associè à $\frac{n^2\lambda-1}{(n+1)^2}$.

6. (a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{ \frac{-n + j(j+1)}{n^2} \, ; j \in \{0, \ldots, n\} \right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{H}_n : \mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{ \frac{-n+j(j+1)}{n^2} ; j \in [\![0, n]\!] \right\}$.

- Par définition, $\varphi_1(P) = XP - (X^2-1)P'$ car $P'' = \theta$ si le degré de P est dominé par 1. Dans la base $(1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$ on a la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On sait que λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda I_2$ est non inversible si et seulement si $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$ si et seulement si $\lambda^2 - 1 = 0$ si et seulement si $\lambda = 1$ ou -1.
Donc $\mathrm{Sp}(\varphi_1) = \{-1, 1\} = \left\{ \frac{-1+j(j+1)}{1^2} ; j \in [\![0, 1]\!] \right\}$.
Donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$. Avec la question 5(b), on sait que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\frac{n^2\left(\frac{-n+j(j+1)}{n^2}\right)-1}{(n+1)^2}$ est valeur propre de φ_{n+1} donc $\frac{-(n+1)+j(j+1)}{(n+1)^2}$ est valeur propre de φ_{n+1}.
On pose $g : x \mapsto \frac{-(n+1)+x(x+1)}{(n+1)^2}$, cette fonction est polynomiale donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{2x+1}{(n+1)^2} > 0$ lorsque $x \geqslant 0$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc avec j qui varie dans $[\![0, n]\!]$, on voit que $g(j)$ prend $n+1$ valeurs deux à deux distinctes comprises entre $g(0) = \frac{-1}{n+1}$ et $g(n) = \frac{-(n+1)+n(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{n^2-1}{(n+1)^2} < 1$. Or on sait avec la question 4(c) que 1 est valeur propre de φ_{n+1} donc nous avons trouvé $n+2$ valeurs propres de φ_{n+1}, comme la dimension de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ est $n+2$, nous avons trouvé tous les éléments du spectre de φ_{n+1}. En remarquant que si $j = n+1$, on a $\frac{-(n+1)+j(j+1)}{(n+1)^2} = 1$, on peut conclure

$$\mathrm{Sp}(\varphi_{n+1}) = \left\{ \frac{-(n+1) + j(j+1)}{(n+1)^2} ; j \in [\![0, n+1]\!] \right\}$$

donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Finalement $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{ \frac{-n+j(j+1)}{n^2} ; j \in [\![0, n]\!] \right\}.}$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est diagonalisable et déterminer la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{ \frac{-n+j(j+1)}{n^2} ; j \in [\![0, n]\!] \right\}$. Nous savons que le spectre contient $n+1$ valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$ donc φ_n est $\boxed{\text{diagonalisable}}$ et ses SEP sont de dimension 1.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Π_n le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\Pi_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 X^i.$$

(a) À l'aide de la question 1.a., montrer : $\varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n$.

Pour $n = 1$, on a $\Pi_1(X) = 1 + X$ et on a déjà vu que $\varphi_1(X + 1) = 1 + X = \Pi_1(X)$.

Soit $n \geqslant 2$. Par linéarité de φ_n,

$$\varphi_n(\Pi_n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \varphi_n\left(X^i\right) = \varphi_n(1) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \varphi_n\left(X^i\right).$$

Avec 1(a),

$$\varphi_n(\Pi_n) = X + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \left(\frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}\right).$$

On développe

$$\varphi_n(\Pi_n) = X + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}.$$

On simplifie

$$\varphi_n(\Pi_n) = X + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^2 \frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^2 \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}.$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on utilise $\binom{n}{i}^2 \frac{(n-i)^2}{n^2} = \left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)^2 \frac{(n-i)^2}{n^2} = \left(\frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!}\right)^2 = \binom{n-1}{i}^2$ et $\binom{n}{i}^2 \frac{2i(n-i)}{n^2} = 2\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)^2 \frac{i(n-i)}{n^2} = 2\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right) \frac{i}{n} \left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right) \frac{n-i}{n} = 2\left(\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}\right)\left(\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}\right)$ $= 2\binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{i}$.

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on utilise $\binom{n}{i}^2 \frac{i^2}{n^2} = \binom{n-1}{i-1}^2$.

$$\varphi_n(\Pi_n) = X + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i}^2 X^{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} 2\binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{i} X^i + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1}^2 X^{i-1}.$$

on fait les changements de variables $k = i + 1$ et $j = i - 1$,

$$\varphi_n(\Pi_n) = X + \sum_{k=2}^{n} \binom{n-1}{k-1}^2 X^k + 2\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{i} X^i + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}^2 X^j.$$

Pour $n = 2$, on obtient

$$\varphi_2(\Pi_2) = X + \sum_{k=2}^{2} \binom{1}{k-1}^2 X^k + 2\sum_{i=1}^{1} \binom{1}{i-1}\binom{1}{i} X^i + \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j}^2 X^j = X + X^2 + 2X + X^0 + X$$

$$= X^2 + 4X + 1 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k}^2 X^k = \Pi_2.$$

Pour $n \geqslant 3$, on peut isoler la plage commune d'indexation $[\![2, n-1]\!]$,

$$\varphi_n(\Pi_n) = X + \underbrace{\binom{n-1}{n-1}^2 X^n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k-1}^2 X^k} + 2\left(\binom{n-1}{1-1}\binom{n-1}{1} X^1 + \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{i} X^i\right.$$

$$+\binom{n-1}{0}^2 X^0 + \binom{n-1}{1}^2 X^1 + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}^2 X^j$$

$$\varphi_n(\Pi_n) = X + X^n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-1}{k-1}^2 X^k + 2\left((n-1)X + \sum_{i=2}^{n-1} \binom{n-1}{i-1}\binom{n-1}{i} X^i\right)$$

$$+1 + (n-1)^2 X + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}^2 X^j.$$

On urbanise avec les puissances de X,

$$\varphi_n(\Pi_n) = 1 + \left(1 + 2(n-1) + (n-1)^2\right) X + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k-1}^2 + 2\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k}^2\right) X^k +$$

$$= 1 + n^2 X + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right)^2 X^k + X^n.$$

Le triangle de Pascal donne, pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$. Il est temps de conclure

$$\varphi_n(\Pi_n) = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 X + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k}^2 X^k + \binom{n}{n}^2 X^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 X^k.$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n.}$

(b) En déduire le sous-espace propre de φ_n associé à la valeur propre 1.

Π_n est de degré n donc ce n'est pas le polynôme nul et il est vecteur propre associé à 1. Or les SEP de φ_n sont tous de dimension 1 donc $\text{SEP}(\varphi_n, 1)$ est une droite et tout vecteur non nul de $\text{SEP}(\varphi_n, 1)$ est une base de $\text{SEP}(\varphi_n, 1)$ donc $\boxed{\text{SEP}(\varphi_n, 1) = \text{Vect}(\Pi_n).}$

8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On note, pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, R_j un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $\lambda_j = \dfrac{-n + j(j+1)}{n^2}$.

(a) Justifier qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi_n^k(P) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (\lambda_j)^k R_j,$$

où φ_n^k désigne l'endomorphisme $\underbrace{\varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_n}_{k \text{ fois}}$.

Avec la question 6, on sait que φ_n est diagonalisable avec des SEP de dimension 1. On note $(\lambda_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ les $n+1$ valeurs propres, en notant R_j un vecteur propre associé à $0 \leqslant j \leqslant n$, on sait que R_j est une base de $\text{SEP}(\varphi_n, \lambda_j) = \text{Vect}(R_j)$. Ainsi la famille $(R_0, R_1, ..., R_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc tout vecteur $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est combinaison linéaire de $(R_0, R_1, ..., R_n)$ et il existe $(\alpha_j)_{0 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j R_j$, on compose par φ_n,

$$\varphi_n(P) = \varphi_n\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j R_j\right) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_n(R_j) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda_j R_j.$$

On peut composer à nouveau par φ_n,

$$\varphi_n^2(P) = \varphi_n\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda_j R_j\right) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda_j \varphi_n(R_j) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 R_j.$$

A ce stade de l'épreuve, on peut se permettre de dire qu'une récurrence simple assure que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\varphi_n^k(P) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \left(\lambda_j^k\right) R_j}.$$

(b) En déduire qu'il existe un réel α tel que la suite de polynômes $(\varphi_n^k(P))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le polynôme $\alpha\Pi_n$.

Soit $n \geqslant 2$, on sait que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_j = \frac{-n+j(j+1)}{n^2} = g(j)$ avec les notations de la réponse 6(a). La fonction g est strictement croissante donc pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$g(0) = -\frac{1}{n} \leqslant g(j) = \lambda_j \leqslant g(n-1) = \frac{-n+(n-1)n}{n^2} = \frac{n^2-2n}{n^2} < 1.$$

Donc $-1 < \lambda_j < 1$ et $\lambda_j^k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$. Notons que $\lambda_n = g(n) = 1$.

Comme n est indépendant de k, on peut sommer les limites ce qui donne

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\varphi_n^k(P)\right) = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \left(\lambda_j^k\right) R_j\right) = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \left(\lambda_j^k\right) R_j + \alpha_n R_n\right) = \alpha_n R_n.$$

On sait que $R_n \in \mathrm{SEP}(\varphi_n, 1) = \mathrm{Vect}(\Pi_n)$ donc R_n est colinéaire à Π_n donc il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $R_n = \beta\Pi_n$ et en notant $\alpha = \alpha_n\beta$, on a bien

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \left(\varphi_n^k(P)\right) = \alpha\Pi_n}.$$

Pour $n = 1$, on a $\varphi_1(X) = 1$ et $\varphi_1^2(X) = X$ donc la suite $\left(\varphi_1^k(X)_{k\in\mathbb{N}^*}\right)$ n'a pas de limite.

Partie B : Étude d'une expérience aléatoire

Dans cette partie, n désigne un entier de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne rouge et d'une urne bleue ainsi que de n boules rouges et de n boules bleues, ces $2n$ boules étant supposées indiscernables au toucher. Initialement, on place les n boules rouges dans l'urne rouge et les n boules bleues dans l'urne bleue.

On procède alors à une succession d'épreuves aléatoires, chaque épreuve consistant à échanger au hasard une boule de l'urne rouge avec une boule de l'urne bleue. Après chaque épreuve, chaque urne contient donc toujours n boules. On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire Z_k égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne rouge à l'issue de la k-ième épreuve. On pose également $Z_0 = n$.

On pourra remarquer que, après chaque épreuve, le nombre de boules rouges dans l'urne rouge est toujours égal au nombre de boules bleues dans l'urne bleue.

9. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1.

   Au début de l'épreuve, il y a n rouges dans l'urne rouge et n bleues dans l'urne bleue donc comme il y a un échange, après la première épreuve il y a $n-1$ rouges dans l'urne rouge et Z_1 est constante de valeur $n-1$.

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer : pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = i) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i-1) + 2\frac{i}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right)\mathbb{P}(Z_k = i) + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i+1).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, le nombre de boules rouges dans l'urne rouge est toujours compris entre 0 et n car il y a toujours n boules dans cette urne. Donc $Z_k(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $\{[Z = \ell]\}_{0 \leqslant \ell \leqslant n}$ est un système complet dévénements avec éventuellement des ensembles vides, on parle aussi de quasi-système complet dévénements. Soit $i \in [\![0, n]\!]$, avec la formule des probabilités totales,

$$P(Z_{k+1} = i) = \sum_{\ell=0}^{n} P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = \ell]).$$

Le $(k+1)^e$ échange permet d'enlever ou d'ajouter une boule rouge à l'urne rouge donc l'écart entre le nombre de boules rouges dans l'urne rouge entre le k^e échange et le $(k+1)^e$ échange ne peut dépasser 1. Donc si $\ell < i-1$ ou si $\ell > i+1$ alors $P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = \ell]) = 0$, donc

$$P(Z_{k+1} = i) = P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i-1]) + P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i]) + P([Z_{k+1} = i+1] \cap [Z_k = i+1])$$

- Si $P(Z_k = i-1) \neq 0$, alors $P_{[Z_k=i-1]}(Z_{k+1} = i)$ est la probabilité que, sachant qu'il y a $i-1$ boules rouges dans l'urne rouge, il y en ait i au tour suivant. Cela signifie que l'on a sorti une bleue de l'urne rouge et une rouge de l'urne bleue, or il y a $n-(i-1)$ boules bleues dans l'urne rouge donc, par équiprobabilité, on en pioche une avec la probabilité $\frac{n-(i-1)}{n} = 1 - \frac{i-1}{n}$. Pour l'urne bleue, c'est la même probabilité par symétrie donc $P_{[Z_k=i-1]}(Z_{k+1} = i) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2$. Si $P(Z_k = i-1) = 0$, alors $P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i-1]) = 0$ donc dans tous les cas,

$$P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i-1]) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 P(Z_k = i-1).$$

- Si $P(Z_k = i) \neq 0$, alors $P_{[Z_k=i]}(Z_{k+1} = i)$ est la probabilité que, sachant qu'il y a i boules rouges dans l'urne rouge, il y en ait i au tour suivant. Cela signifie que l'on a sorti une bleue de l'urne rouge et une bleue de l'urne bleue ou bien que l'on a sorti une rouge de l'urne rouge et une rouge de l'urne bleue. Dans le premier cas, il y a $n-i$ boules bleues dans l'urne rouge donc, par équiprobabilité, on en pioche une avec la probabilité $\frac{n-i}{n} = 1 - \frac{i}{n}$ et il y a i boules bleues dans l'urne bleue donc, par équiprobabilité, on en pioche une avec la probabilité $\frac{i}{n}$ donc le premier cas se réalise avec la probabilité $\left(1 - \frac{i}{n}\right)\frac{i}{n}$. L'autre cas est incompatible avec le premier et par symétrie il a la même probabilité. donc $P_{[Z_k=i-1]}(Z_{k+1} = i) = 2\frac{i}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right)$. Si $P(Z_k = i) = 0$, alors $P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i]) = 0$ donc dans tous les cas,

$$P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i-1]) = 2\frac{i}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right) P(Z_k = i).$$

- Si $P(Z_k = i+1) \neq 0$, alors $P_{[Z_k=i+1]}(Z_{k+1} = i)$ est la probabilité que, sachant qu'il y a $i+1$ boules rouges dans l'urne rouge, il y en ait i au tour suivant. Cela signifie que l'on a sorti une rouge de l'urne rouge et une bleue de l'urne bleue, or il y a $i+1$ boules rouges dans l'urne rouge donc, par équiprobabilité, on en pioche une avec la probabilité $\frac{i+1}{n}$. Pour l'urne bleue, c'est la même probabilité par symétrie donc $P_{[Z_k=i+1]}(Z_{k+1} = i) = \left(\frac{i+1}{n}\right)^2$. Si $P(Z_k = i+1) = 0$, alors $P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i+1]) = 0$ donc dans tous les cas,

$$P([Z_{k+1} = i] \cap [Z_k = i+1]) = \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 P(Z_k = i+1).$$

Finalement

$$\boxed{P(Z_{k+1} = i) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 P(Z_k = i-1) + 2\frac{i}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right) P(Z_k = i) + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 P(Z_k = i+1).}$$

11. (a) Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction `Python` suivante pour que, prenant en entrée le nombre n initial de boules rouges et le nombre k d'épreuves réalisées, elle renvoie une simulation de Z_k.

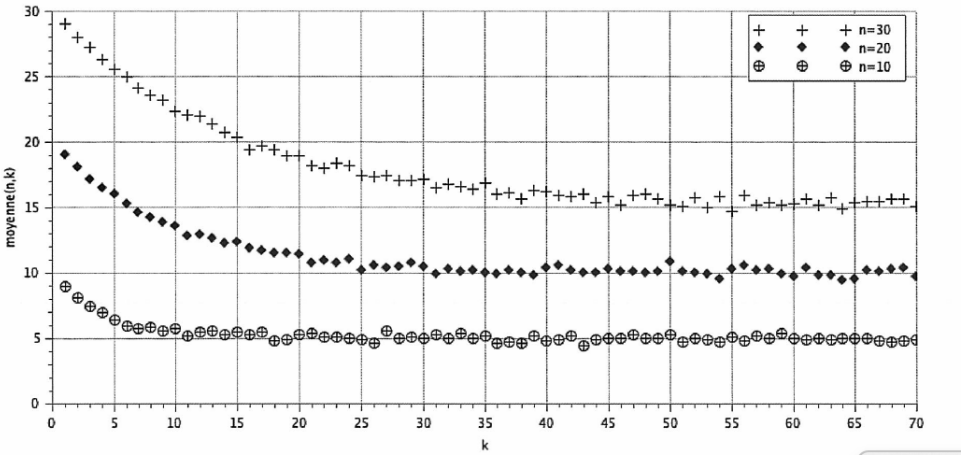
```
def simule(n,k):
        R=n #R désigne le nombre de boules rouges dans l'urne rouge
        for j in range(k):
                aleaR=rd.random()
                aleaB=rd.random()
                if aleaR<=(R/n) and aleaB<=(R/n) :
                        R=R-1
                elif aleaR > (R/n) & aleaB > (R/n):
                        R=R+1
                return R
```

(b) Pour les cubes : Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def esperance(n,k):` qui, prenant en entrée le nombre n initial de boules rouges et le nombre k d'épreuves réalisées, renvoie une estimation de l'espérance de Z_k. On justifiera, en particulier, la méthode d'estimation.

On s'appuie sur la méthode de Monte-Carlo. On utilise la loi faible des grands nombres, on simule un grand nombre de fois la variable Z_k de façon indépendante et on fait la moyenne des valeurs obtenues, cette moyenne dite empirique converge en probabilité vers $E(Z_k)$. On fixe 10 000 simulations.

```
def esperance(n,k):
    S=0
    for k in range(10000):
        S=S+simule(n,k)
    return S/10000
```

(c) On utilise la fonction précédente et on trace l'espérance de Z_k en fonction de k pour différentes valeurs de n. On obtient le graphe ci-dessous, reconstitué ici de façon schématique.



Émettre une conjecture sur la valeur de la limite de l'espérance de Z_k lorsque k tend vers $+\infty$.

Les associations $30 \to 15, 20 \to 10, 10 \to 5$ suggèrent la relation $n \mapsto \frac{n}{2}$. Donc $\boxed{\lim_{k\to+\infty}(E(Z_k)) = \frac{n}{2}.}$

12. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta_k = Z_{k+1} - Z_k$.

(a) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\Delta_k(\Omega)$.

Pour $k = 0$, on sait que $[Z_0 = n], [Z_1 = n-1]$ sont certains donc $\Delta_0(\Omega) = \{-1\}$.
Pour $k = 1$, on sait que $[Z_1 = n-1]$ est certain et $Z_2(\Omega) = \{n-2, n-1, n\}$ donc $\Delta_1(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.
Pour $k \geqslant 2$, on montre par récurrence que $\Delta_k(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. En effet, après un échange la variation du nombre de boules rouges est compris entre -1 et 1.

(b) Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z_k = i).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, on reprend la formule des probabilités totales avec le quasi-système complet dévénements $\{[Z = i]\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$,

$$P(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^{n} P([\Delta_k = -1] \cap [Z_k = i]) = \sum_{i=0}^{n} P([Z_{k+1} - Z_k = -1] \cap [Z_k = i])$$

$$= \sum_{i=0}^{n} P([Z_{k+1} = i - 1] \cap [Z_k = i]).$$

Si $P(Z_k = i) \neq 0$, alors $P_{[Z_k=i]}(Z_{k+1} = i - 1)$ est la probabilité que, sachant qu'il y a i boules rouges dans l'urne rouge, il y en ait $i - 1$ au tour suivant. Cela signifie que l'on a sorti une rouge de l'urne rouge et une bleue de l'urne bleue, or il y a i boules rouges dans l'urne rouge donc, par équiprobabilité, on en pioche une avec la probabilité $\frac{i}{n}$. Pour l'urne bleue, c'est la même probabilité par symétrie donc $P_{[Z_k=i+1]}(Z_{k+1} = i) = \left(\frac{i}{n}\right)^2$.
Si $P(Z_k = i) = 0$, alors $P([Z_{k+1} = i - 1] \cap [Z_k = i]) = 0$ donc dans tous les cas,

$$P([Z_{k+1} = i - 1] \cap [Z_k = i]) = \left(\frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i).$$

Finalement

$$\boxed{P(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i)}.$$

De façon analogue,

$$P(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^{n} P([\Delta_k = 1] \cap [Z_k = i]) = \sum_{i=0}^{n} P([Z_{k+1} - Z_k = 1] \cap [Z_k = i])$$

$$= \sum_{i=0}^{n} P([Z_{k+1} = i + 1] \cap [Z_k = i]).$$

Si $P(Z_k = i) \neq 0$, alors $P_{[Z_k=i]}(Z_{k+1} = i + 1)$ est la probabilité que, sachant qu'il y a i boules rouges dans l'urne rouge, il y en ait $i + 1$ au tour suivant. Cela signifie que l'on a sorti une bleue de l'urne rouge et une rouge de l'urne bleue, or il y a $n - i$ boules bleues dans l'urne rouge donc, par équiprobabilité, on en pioche une avec la probabilité $\frac{n-i}{n}$. Pour l'urne bleue, c'est la même probabilité par symétrie donc $P_{[Z_k=i+1]}(Z_{k+1} = i) = \left(\frac{n-i}{n}\right)^2$.
Si $P(Z_k = i) = 0$, alors $P([Z_{k+1} = i + 1] \cap [Z_k = i]) = 0$ donc dans tous les cas,

$$P([Z_{k+1} = i + 1] \cap [Z_k = i]) = \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i).$$

Finalement

$$\boxed{P(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i)}.$$

(c) Montrer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(\Delta_k) = 1 - \frac{2}{n}\mathbb{E}(Z_k), \qquad \text{puis} \qquad \mathbb{E}(Z_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\mathbb{E}(Z_k) + 1.$$

Le support de Δ_k contient au plus 3 valeurs donc Δ_k a une espérance et

$$E(\Delta_k) = -P(\Delta_k = -1) + 0 \times P(\Delta_k = 0) + P(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^{n} \left(-\left(\frac{i}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \right) P(Z_k = i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(1 - 2\frac{i}{n}\right) P(Z_k = i) = \sum_{i=0}^{n} P(Z_k = i) - \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n} iP(Z_k = i)$$

or $Z_k(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ donc $\sum_{i=0}^{n} P(Z_k = i) = 1$ et $\sum_{i=0}^{n} iP(Z_k = i) = E(Z_k)$ finalement

$$\boxed{E(\Delta_k) = 1 - \frac{2}{n}E(Z_k)}.$$

Par linéarité de l'epérance, $E(\Delta_k) = E(Z_{k+1}) - E(Z_k) = 1 - \frac{2}{n}E(Z_k)$ donc

$$\boxed{E(Z_{k+1}) = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)E(Z_k)}.$$

(d) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une expression de $\mathbb{E}(Z_k)$ en fonction de k et de n. Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbb{E}(Z_k)$ et commenter le résultat obtenu.

On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = E(Z_k)$, on a $u_{k+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) u_k$ avec $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ indépendant de k, on voit que la suite (u_k) suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
Le point fixe ℓ est solution de $\ell = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)\ell \iff \ell - \left(1 - \frac{2}{n}\right)\ell = 1 \iff \frac{2}{n}\ell = 1 \iff \ell = \frac{n}{2}$.
Par soustraction terme à terme de $\ell = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)\ell$ et $u_{k+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) u_k$, on a

$$u_{k+1} - \ell = \left(1 - \frac{2}{n}\right)(u_k - \ell)$$

donc la suite $(u_k - \ell)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$.
Et pour tout $k \in \mathbb{N}^*, u_k - \ell = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-1}(u_1 - \ell)$.
On sait que $n \geqslant 2$, donc $0 < \frac{2}{n} \leqslant 1$ et $0 \leqslant 1 - \frac{2}{n} < 1$ donc $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-1} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ donc $u_k - \ell \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ donc

$$\boxed{u_k = E(Z_k) \underset{k \to +\infty}{\to} \ell = \frac{n}{2}.}$$

Il est naturel de s'attendre à un équilibre des boules rouges et bleues dans les deux urnes après un grand nombre d'échanges étant entendu qu'il y a au total autant de rouges que de bleues dans le jeu.

13. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme Q_k de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$Q_k = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(Z_k = i) X^i.$$

(a) À l'aide de la question 1.a., démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\varphi_n(Q_k) = Q_{k+1}$, où φ_n est l'endomorphisme étudié dans la partie A.

Avec 1(a),

$$\varphi_n\left(Q_k\right) = \sum_{i=0}^{n} P\left(Z_k = i\right) \varphi_n\left(X^i\right) = P\left(Z_k = 0\right) \varphi_n\left(1\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} P\left(Z_k = i\right) \left(\frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1} \right)$$

$$= P\left(Z_k = 0\right) X + \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 P\left(Z_k = i\right) X^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} 2\frac{i}{n} \left(\frac{n-i}{n}\right) P\left(Z_k = i\right) X^i + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 P\left(Z_k =$$

On enlève les termes nuls,

$$\varphi_n\left(Q_k\right) = P\left(Z_k = 0\right) X + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 P\left(Z_k = i\right) X^{i+1}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} 2\frac{i}{n} \left(\frac{n-i}{n}\right) P\left(Z_k = i\right) X^i + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 P\left(Z_k = i\right) X^{i-1}.$$

On fait des changements de variables

$$\varphi_n\left(Q_k\right) = P\left(Z_k = 0\right) X + \sum_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{j-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k = j-1\right) X^j + \sum_{i=1}^{n-1} 2\frac{i}{n} \left(\frac{n-i}{n}\right) P\left(Z_k = i\right) X^i$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j+1}{n}\right)^2 P\left(Z_k = j+1\right) X^j.$$

Pour $n = 2$,

$$\varphi_2\left(Q_k\right) = P\left(Z_k = 0\right) X + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 P\left(Z_k = 1\right) X^2 + 2\frac{1}{2} \left(\frac{2-1}{2}\right) P\left(Z_k = 1\right) X^1$$

$$+ \sum_{j=0}^{1} \left(\frac{j+1}{2}\right)^2 P\left(Z_k = j+1\right) X^j$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 P\left(Z_k = 1\right) + \left(P\left(Z_k = 0\right) + 2\frac{1}{2} \left(\frac{2-1}{2}\right) P\left(Z_k = 1\right) + \left(\frac{1+1}{2}\right)^2 P\left(Z_k = 1+1\right) \right) X$$

$$+ \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 P\left(Z_k = 1\right) \right) X^2.$$

On applique la question 10, avec $i = 0$, on a $P\left(Z_{k+1} = 0\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P\left(Z_k = 1\right)$
puis avec $i = 1$, $P\left(Z_{k+1} = 1\right) = P\left(Z_k = 0\right) + 2\frac{1}{2}\left(\frac{2-1}{2}\right) P\left(Z_k = 1\right) + \left(\frac{1+1}{2}\right)^2 P\left(Z_k = 1+1\right)$
puis avec $i = 2$, $P\left(Z_{k+1} = 2\right) = \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 P\left(Z_k = 1\right) \right)$ car $P\left(Z_k = 3\right) = 0$ donc

$$\varphi_2\left(Q_k\right) = P\left(Z_{k+1} = 0\right) + P\left(Z_{k+1} = 1\right) X + P\left(Z_{k+1} = 2\right) X^2 = Q_{k+1}.$$

Pour $n \geqslant 3$, la plage commune d'indexation est $[\![2, n-1]\!]$,

$$\varphi_n\left(Q_k\right) = P\left(Z_k = 0\right) X + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k = n-1\right) X^n$$

$$+\sum_{j=2}^{n-1}\left(1-\frac{j-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=j-1\right)X^j+\sum_{i=2}^{n-1}2\frac{i}{n}\left(\frac{n-i}{n}\right)P\left(Z_k=i\right)X^i+2\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)P\left(Z_k=1\right)X$$

$$+\left(\frac{1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=1\right)X^0+\left(\frac{2}{n}\right)^2 P\left(Z_k=2\right)X^1+\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=j+1\right)X^j.$$

On urbanise selon les puissances de X,

$$\varphi_n\left(Q_k\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=1\right)+\left(P\left(Z_k=0\right)+2\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)P\left(Z_k=1\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2 P\left(Z_k=2\right)\right)X$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1}\left(2\frac{i}{n}\left(\frac{n-i}{n}\right)P\left(Z_k=i\right)+\left(1-\frac{i-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=i-1\right)+\left(\frac{i+1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=i+1\right)\right)X^i$$

$$+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=n-1\right)X^n.$$

Dans le sigma, on utilise la question 10,

$$\varphi_n\left(Q_k\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=1\right)+\left(P\left(Z_k=0\right)+2\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)P\left(Z_k=1\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2 P\left(Z_k=2\right)\right)X$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1}P\left(Z_{k+1}=i\right)X^i+\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=n-1\right)X^n.$$

Avec la question 10, en remplaçant i par n avec $P\left(Z_k=n+1\right)=0$ on a

$$P\left(Z_{k+1}=n\right)=\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=n-1\right)$$

donc

$$\varphi_n\left(Q_k\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=1\right)+\left(P\left(Z_k=0\right)+2\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)P\left(Z_k=1\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2 P\left(Z_k=2\right)\right)X$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1}P\left(Z_{k+1}=i\right)X^i+P\left(Z_{k+1}=n\right)X^n.$$

Avec la question 10, en remplaçant i par 0 avec $P\left(Z_k=-1\right)=0$ on a

$$P\left(Z_{k+1}=0\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2 P\left(Z_k=1\right)$$

donc

$$\varphi_n\left(Q_k\right)=P\left(Z_{k+1}=0\right)+\left(P\left(Z_k=0\right)+2\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)P\left(Z_k=1\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2 P\left(Z_k=2\right)\right)X$$

$$+\sum_{i=2}^{n}P\left(Z_{k+1}=i\right)X^i.$$

Avec la question 10, en remplaçant i par 1 on a

$$P\left(Z_{k+1}=1\right)=P(Z_k=0)+2\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)P\left(Z_k=1\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2 P\left(Z_k=2\right)$$

donc finalement

$$\boxed{\varphi_n\left(Q_k\right)=\sum_{i=0}^{n}P\left(Z_{k+1}=i\right)X^i=Q_{k+1}}.$$

(b) En déduire qu'il existe un réel α tel que la suite de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme $\alpha\Pi_n$, où Π_n est le polynôme défini à la question 7.

On applique la question 8(b), avec $Q_0 = X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $n \geqslant 2$, on sait qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_n^k(Q_0) = \alpha\Pi_n$ or par récurrence facile $\varphi_n^k(Q_0) = Q_k$ donc

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} Q_k = \alpha\Pi_n}.$$

14. (a) Déduire de la question précédente : pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(Z_k = i) = \alpha\binom{n}{i}^2.$$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$, on utilise l'indication du début de sujet qui nous dit que

$$\lim_{k\to+\infty} a_{k,i} = b_i$$

ici $a_{k,i} = P(Z_k = i)$ et $b_i = \alpha\binom{n}{i}^2$ d'après les définition de Q_k et $\alpha\Pi_n$.

(b) On admet la formule suivante :

$$\forall (a, b, m) \in \mathbb{N}^3, \qquad \sum_{i=0}^{m} \binom{a}{i}\binom{b}{m-i} = \binom{a+b}{m}.$$

Montrer : $\alpha = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.

On a $Z_k(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc $\sum\limits_{i=0}^{n} P(Z_k = i) = 1$ donc par somme de limites quand $k \to +\infty$ avec une somme de $n+1$ termes et n indépendant de k il vient

$$1 = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} P(Z_k = i)\right) = \sum_{i=0}^{n} \lim_{k\to+\infty} (P(Z_k = i)) = \sum_{i=0}^{n} \alpha\binom{n}{i}^2$$

donc avec $\binom{n}{i}^2 > 0$ il vient $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \neq 0$ et $\alpha = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2}$.

Ensuite on sait que $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ donc $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{n+n}{n}$ avec le rappel de la formule de Van der Monde. Finalement $\boxed{\alpha = \frac{1}{\binom{2n}{n}}}$.

(c) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi et l'espérance.

(Z_k) est une suite de variables discrètes à support dans $[\![0, n]\!]$ donc avec 14(a), (Z_k) converge en loi vers une variable T telle que $T(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(T = i) = \alpha\binom{n}{i}^2$. Les upport de T est fini donc T a une espérance et

$$E(T) = \alpha\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}^2 = \alpha\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}^2 = \alpha\sum_{i=1}^{n} n\binom{n-1}{i-1}\binom{n}{i}$$

avec $i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$ et comme $\binom{n-1}{i-1} = \binom{n-1}{n-i}$,

$$E(T) = n\alpha\sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{n-i}\binom{n}{i}.$$

Sachant $\binom{n-1}{n-0} = 0$, et la formule de Van der Monde,

$$E(T) = n\alpha \sum_{i=0}^{n} \binom{n-1}{n-i}\binom{n}{i} = n\alpha \binom{2n-1}{n}.$$

Pour conclure

$$\boxed{E(T) = \frac{n\binom{2n-1}{n}}{\binom{2n}{n}}}.$$