Chapitre 6
Couples de variables aléatoires discrètes

1 Indépendance de deux variables aléatoires

1.1 Indépendance d'évènements

Définition 1.1.1.

Deux évènements A et B sont dits **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque 1.1.1.

- Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(B) = P_A(B)$.

1.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Dans cette section, X et Y sont deux variables aléatoires (discrètes ou non) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Définition 1.2.1.

On dit que les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** lorsque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les évènements $(X \leq x)$ et $(Y \leq y)$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Proposition 1.2.1.
Soient X et Y deux variables aléatoires (discrètes ou non) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
X et Y sont indépendants si, et seulement si, pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$:

$$P((X \in I) \cap (Y \in J)) = P(X \in I)P(Y \in J).$$

Remarque 1.2.1.

- L'indépendance de X et de Y signifie que tout évènement formé à partir de X est indépendant de tout évènement formé à partir de Y.

Proposition 1.2.2.
Si X et Y sont indépendantes, alors pour toutes fonction f et g dont les ensembles de définitions contiennent respectivement $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Proposition 1.2.3 (Cas des variables aléatoires discrètes)**.**
Les variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a :

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

2 Généralités sur les couples de variables aléatoires réelles

Dans cette section, X et Y sont deux variables aléatoires (discrètes ou non) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Définition 2.0.1.

On appelle **couple des variables aléatoires X et Y** et on note (X, Y) l'application :

$$(X,Y) : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right. .$$

Définition 2.0.2.

- On appelle **loi du couple aléatoire** (X, Y) (ou **loi conjointe de** (X, Y)) la donnée de la fonction $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, appelée **fonction de répartition conjointe**, définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F_{(X,Y)}(x, y) = P((X \leq x) \cap (Y \leq y)).$$

- La loi de X est appelée la **première loi marginale** du couple (X, Y), et la loi de Y la **seconde loi marginale** de (X, Y).

Remarque 2.0.1.

- Notons que $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Ainsi, on ne donnera pas en général l'ensemble $(X, Y)(\Omega)$ du couple (X, Y) (qui peut être difficile à déterminer) mais plutôt $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Proposition 2.0.1.
Les variables X est Y sont indépendantes si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) F_Y(y),$$

où F_X et F_Y sont les fonctions de répartition de X et Y.

Proposition 2.0.2.
On suppose que :
- les couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) ont la même loi conjointe,
- g est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors les variables aléatoires $g(X_1, Y_1)$ et $g(X_2, Y_2)$ ont la même loi.

3 Couples de variables aléatoires discrètes

Dans toute la suite, X et Y sont des variables discrètes dont on fixera une numérotation de leurs ensembles images (avec $I = [\![1, n]\!]$ ou $\mathbb{N}$ et $J = [\![1, m]\!]$ ou $\mathbb{N}$ selon que X et Y soient finies ou non) :

$$X(\Omega) = \{x_i, i \in I\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}.$$

3.1 Loi d'un couple de variables discrètes

Proposition 3.1.1.
La loi du couple (X, Y) est entièrement déterminée par la donnée de :
- $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in J\}$;
- $p_{i,j} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ pour tout $(i, j) \in I \times J$.

Notation :
$(X = x_i, Y = y_j) = (X = x_i) \cap (Y = y_j) = ((X, Y) = (x_i, y_j))$.

Exemple 3.1.1.
Considérons l'expérience aléatoire consistant à jeter deux dés, X la variable donnant le plus petit résultat et Y le plus grand. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

Proposition 3.1.2.
La famille $((X = x_i) \cap (Y = y_j))_{(i,j)\in I\times J}$ est un système complet d'évènements. Par conséquent la série double $\sum_{(i,j)\in I\times J} (P((X = x_i) \cap (Y = y_j)))_{(i,j)\in I\times J}$ converge absolument, et :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{(i,j)\in I\times J} p_{i,j} = 1.$$

Proposition 3.1.3.
Soient I et J des ensembles finis ou dénombrables, et soit $(p_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels satisfaisant :

- $\forall (i, j) \in I \times J),\ p_{i,j} \geq 0$;
- la fsérie double $\sum_{i,j} p_{i,j}$ converge (absolument) et sa somme vaut 1.

Alors la famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ définit une **loi conjointe de probabilité**, c'est-à-dire qu'il existe un couple de variables discrètes (X, Y) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que :

$$X(\Omega) \times Y(\Omega) = I \times J \text{ et } \forall (i, j) \in I \times J,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = p_{i,j}.$$

3.2 Lois marginales

Proposition 3.2.1.
Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires, les ensembles $(X = x_i)_{i\in I}$ et $(Y = y_j)_{j\in J}$ formant des systèmes complets d'évènements. La formule des probabilités totales nous donne :

$$\forall i \in I,\ p_i = P(X = x_i) = \sum_{j\in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j\in J} p_{i,j}$$

$$\forall j \in J,\ q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i\in I} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{i\in I} p_{i,j}.$$

Exemple 3.2.1.
Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) de l'exemple **??**.

Remarque 3.2.1.
La proposition précédente nous dit qu'il est possible d'obtenir les lois marginales de X et Y à partir de la loi conjointe de (X, Y).
Attention en revanche il n'est en général pas possible de retrouver la loi conjointe à partir des lois marginales.
Cela reste possible cependant lorsque X et Y sont indépendantes. Dans ce cas :

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j).$$

Exemple 3.2.2.
Soit $p \in]0, 1[$ et soit la famille $(p_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ p_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{e^{-2}}{m!(n-m)!} & \text{si } n \geq m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $(p_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est la loi conjointe d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes, et déterminer les lois marginales. X et Y sont-elles indépendantes ?

3.3 Lois conditionnelles

Définition 3.3.1.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes, et soit $i \in I$ tel que $P(X = x_i) \neq 0$. On appelle **loi conditionnelle de Y sachant que** $(X = x_i)$ la donnée de $Y((X = x_i))$ et des probabilités :

$$\forall j \in J,\ P_{(X=x_i)}(Y = y_j) = \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{P(X = x_i)} = \frac{p_{i,j}}{p_i}.$$

On définit de même la **loi conditionnelle de X sachant** $(Y = y_j)$.

Remarque 3.3.1.
$Y((X = x_i)) \subset Y(\Omega)$ donc quitte à avoir certaines probabilités $P_{(X=x_i)}(Y = y_j)$ nulle (qu'il ne faudra donc pas oublier) on pourra donner $Y(\Omega)$ au lieu de $Y((X = x_i))$.

Proposition 3.3.1.
On suppose que pour tout $(i,j) \in I \times J$, $P(x = x_i) \neq 0$ et $P(Y = y_j) \neq 0$. Alors, par la formule des probabilités composées, pour tout $(i,j) \in I \times J$:

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(Y = y_j)P_{(Y=y_j)}(X = x_i) = P(X = x_i)P_{(X=x_i)}(Y = y_j),$$

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(Y = y_j)P_{(Y=y_j)}(X = x_i),$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i)P_{(X=x_i)}(Y = y_j).$$

Exemple 3.3.1.
Dans l'exemple **??**, déterminer la loi de X sachant $(Y = n)$.

4 Variables aléatoires de la forme $g(X,Y)$

4.1 Fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes

Proposition 4.1.1.
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes, et $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $g(X,Y)$ est une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Exemple 4.1.1.
Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes alors, $X+Y$, XY, $\max(X,Y)$ et $\min(X,Y)$ sont des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Proposition 4.1.2 (Loi de $g(X,Y)$)**.**
On note $Z = g(X,Y)$. Pour tout $z \in Z(\Omega)$:

$$P(Z = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ g(x,y) = y}} P((X = x) \cap (Y = y)).$$

Théorème 4.1.3 (Théorème de transfert double)**.**
La variable aléatoire $Z = g(X,Y)$ admet une espérance si, et seulement si, la série double $\sum_{(i,j) \in I \times J} g(x_i, y_j))P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ converge absolument.
Dans ce cas :

$$E(Z) = \sum_{(i,j) \in I \times J} g(x_i, y_j))P((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Corollaire 4.1.4.
Soient X et Y des variables aléatoires admettant une espérance. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance, et :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

4.2 Somme de deux variables indépendantes

Proposition 4.2.1.
Soient X et Y des variables aléatoires discrètes. Alors, par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'évènements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$, la loi de $Z = X + Y$ est donnée par :

$$\forall z \in (X+Y)(\Omega), \quad P(X+Y=z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ z-x \in Y(\Omega)}} P(X = x, Y = z - x)$$

Démonstration. □

Proposition 4.2.2.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k).$$

Démonstration.

□

Méthode 4.1. Pour déterminer la loi de la va $X+Y$ quand on connaît les lois de X et de Y, avec X et Y indépendantes, on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support $(X+Y)(\Omega)$ à partir de ceux de X et Y.
2. On considère le système complet d'évènements associé à X : $\{X=n, n\in X(\Omega)\}$.
3. Pour $k\in(X+Y)(\Omega)$, on détermine $P(X+Y=k)$ en appliquant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{n\in X(\Omega)} P(X+Y=k\cap X=n) \\ &= \sum_{n\in X(\Omega)} P(Y=k-n\cap X=n) \end{aligned}$$

4. On réduit alors la somme en trouvant les conditions sur n pour que $k-n\in Y(\Omega)$.
5. On utilise l'indépendance des va X et Y pour se ramener à

$$P(X+Y=k)=\sum_{n\in ??} P(Y=k-n)P(X=n).$$

6. On remplace les probabilités par leurs valeurs et on calcule la somme.

Exemple 4.2.1.
On lance indéfiniment une pièce de monnaie truquée de sorte que le côté pile est obtenu avec la probabilité p (avec $0<p<1$). On note X le rang du premier pile obtenu et Y celui du deuxième.

1. Déterminer les lois de X et $Y-X$.

2. Justifier que X et $Y-X$ sont indépendantes. En déduire la loi de Y.

4.3 Stabilité des lois binomiales et de Poisson

Proposition 4.3.1 (Stabilité des lois de Poisson)**.**
Soient X et Y deux variables indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$. Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

Démonstration. □

Lemme. Pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, pour tout $0 \leq \ell \leq n_1 + n_2$:

$$\sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{\ell - k} = \binom{n_1 + n_2}{\ell} \qquad \text{(formule de Vandermonde)}$$

En prenant pour convention que $\binom{n}{k} = 0$ si $k \notin [\![0, n]\!]$.

Proposition 4.3.2 (Stabilité des lois binomiales)**.**
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Alors :

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p).$$

Démonstration.

□

4.4 Maximum et minimum de deux variables

Proposition 4.4.1.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, $Z = \max(X, Y)$. Alors :

- $\forall z \in \mathbb{R}$, $(Z \leq z) = (X \leq z) \cap (Y \leq z)$;
- Si de plus les variables X et Y sont indépendantes, on a :

$$\forall z \in \mathbb{R},\ P(Z \leq z) = P(X \leq z) \times P(Y \leq z).$$

Méthode 4.2. Pour déterminer la loi de $\max(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ quand on connait les lois de X et Y, avec X et Y indépendantes et à valeurs entières, on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support de $\max(X, Y)(\Omega)$ à partir de ceux de X et Y.
2. Pour $k \in \max(X, Y)(\Omega)$, on justifie que " $\max(X, Y) \leq k$" = "$X \leq k$" $\cap$ "$Y \leq k$".
3. On utilise l'indépendance des va X et Y pour se ramener à :

$$P(\max(X, Y) \leq k) = P([X \leq k] \cap [Y \leq k]) = P(X \leq k)P(Y \leq k)$$

4. On utilise les fonctions de répartition de X et Y pour obtenir

$$P(\max(X, Y) \leq k) = F_X(k)F_Y(k)$$

.

5. Enfin on a " $\max(X, Y) = k$" = " $\max(X, Y) \leq k$ mais pas $\max(X, Y) \leq k - 1$" car X et Y à valeurs entières, donc

$$P(\max(X, Y) = k) = P(\max(X, Y) \leq k) - P(\max(X, Y) \leq k - 1)$$

Exemple 4.4.1.
Soient X et Y des variables indépendantes suivant toutes les deux une loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Déterminer la loi de $Z = \max(X, Y)$.

Proposition 4.4.2.
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, $Z = \min(X, Y)$. Alors :

- $\forall z \in \mathbb{R}$, $(Z > z) = (X > z) \cap (Y > z)$;
- Si de plus les variables X et Y sont indépendantes, alors :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad P(Z > z) = P(X > z)P(Y > z).$$

Méthode 4.3. Pour déterminer la loi de $\min(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ quand on connait les lois de X et Y, avec X et Y indépendantes et à valeurs entières, on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support de $\min(X, Y)(\Omega)$ à partir de ceux de X et Y.
2. Pour $k \in \max(X, Y)(\Omega)$, on justifie que " $\min(X, Y) > k$" = "$X > k$" $\cap$ "$Y > k$".
3. On utilise l'indépendance des va X et Y pour se ramener à :
$$P(\min(X, Y) > k) = P([X > k] \cap [Y > k]) = P(X > K)P(Y > k)$$
4. On utilise les fonctions de répartitions de X et Y pour avoir :
$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - F_X(k)$$
$$P(Y > k) = 1 - P(Y \leq k) = 1 - F_Y(k)$$
5. On en déduit :
$$P(\min(X, Y) > k) = (1 - F_X(k))(1 - F_Y(k))$$
6. Enfin on a " $\min(X, Y) = k$" = " $\min(X, Y) > k - 1$ mais pas $\min(X, Y) > k$" car X et Y à valeurs entières, donc
$$P(\min(X, Y) = k) = P(\min(X, Y) > k - 1) - P(\min(X, Y) > k)$$

5 Covariance, corrélation linéaire

5.1 Espérance d'un produit

Lemme. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Démonstration. □

Proposition 5.1.1.
Soient X, Y des variables aléatoires discrètes admettant une variance. Alors XY admet une espérance et :

$$E(XY) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j P((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Démonstration. □

Proposition 5.1.2.
Soit X, Y des variables aléatoires discrètes et indépendantes. On suppose que X et Y admettent une espérance. Alors XY admet une espérance et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Démonstration.

□

5.2 Covariance

Définition 5.2.1.

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes admettant une variance (ou de manière équivalente un moment d'ordre 2). On appelle **covariance de X et Y**, et on note $\mathrm{Cov}(X, Y)$, le réel :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big).$$

On dit que X et Y sont **non corrélées** si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Remarque 5.2.1.
$\mathrm{Cov}(X, Y)$ existe bien car $X - E(X)$ et $Y - E(Y)$ admettent toutes deux une variance, et donc leur produit admet une espérance.

Théorème 5.2.1 (Formule de Huygens)**.**
Si X et Y admettent toutes deux une variance, alors

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Démonstration.

□

Remarque 5.2.2.
Si X admet une variance alors $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$.

Proposition 5.2.2 (Covariance avec une variable aléatoire constante)**.**
Si X admet une variance et $Y = a$ presque sûrement, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
En particulier, $\mathrm{Cov}(X, a) = 0$.

Proposition 5.2.3.
On suppose que X, Y, Z, T admettent toutes une variance. Alors :

- **Symétrie** : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.
- **Bilinéarité** (ie linéaire par rapport à chacune des variables) :
  - Linéarité à gauche : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \mathrm{Cov}(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda \mathrm{Cov}(X,Z) + \mu \mathrm{Cov}(Y,Z)$;
  - Linéarité à droite : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \mathrm{Cov}(X, \lambda Z + \mu T) = \lambda \mathrm{Cov}(X,Z) + \mu \mathrm{Cov}(X,T)$;
- **Positivité** : pour tout variable aléatoire discrète X admettant une variance, on a :

$$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X) \geq 0.$$

Démonstration. □

Proposition 5.2.4.
Soient X et Y admettant toutes deux une variance.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Démonstration. □

Remarque 5.2.3.
Ainsi par contraposée si $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$, alors X et Y ne sont pas indépendantes. ATTENTION cependant, la réciproque est fausse : on peut avoir $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ avec X et Y non indépendantes.

Exemple 5.2.1.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On pose $S = X + Y$ et $U = X - Y$.

1. Montrer que $\mathrm{Cov}(S,U) = 0$.

2. S et U sont-elles indépendantes ?

Théorème 5.2.5 (Variance d'une somme)**.**
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes admettant chacune une variance.

- La variable aléatoire $X + Y$ admet une variance qui vaut :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

- Dans le cas où X et Y sont indépendantes :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Démonstration. □

Remarque 5.2.4.

- Attention, la variance n'est pas linéaire : en général, on n'a pas $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- On retiendra que $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2}(V(X + Y) - V(X) - V(Y))$, qui permet de calculer la covariance à partir des variances.

5.3 Coefficient de corrélation linéaire

Proposition 5.3.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**
On suppose que X et Y admettent une variance. Alors :

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y).$$

Où $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ est l'écart-type de X.

Proposition 5.3.2 (Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**
On suppose que X et Y admettent une variance. On a équivalence entre les deux points suivants :

(i) $|\text{Cov}(X, Y)| = \sigma(X)\sigma(Y)$

(ii) X est constante presque sûrement ou $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $Y = aX + b$ presque sûrement.

De plus, si X n'est pas constante presque sûrement, alors a est du signe de $\text{Cov}(X, Y)$.

Définition 5.3.1.

On suppose que X et Y admettent une variance non nulle. On appelle **coefficient de corrélation linéaire de** (X, Y), et on note $\rho_{X,Y}$, le réel :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Remarque 5.3.1.
Le coefficient de corrélation linéaire est la normalisation de la covariance par le produit des écart types. L'intérêt est que X et Y ne s'expriment pas forcément dans la même unité (par exemple si X représente la température extérieur et Y la facture de chauffage). Cette normalisation permet d'obtenir un réel indépendant des unités de mesure des observations.

Proposition 5.3.3.
On suppose que X et Y admettent une variance non nulle. Alors :

1. $\rho_{X,Y} \in [-1,1]$;
2. $\rho(X,Y) = 1 \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ tel que $Y = aX + b$;
3. $\rho_{X,Y} = -1 \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}_-^\star \times \mathbb{R}$ tel que $Y = aX + b$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du cas d'égalité. □

Remarque 5.3.2.

- Le coefficient de corrélation linéaire permet donc de mesurer la dépendance linéaire qui peut existe entre un couple de variables aléatoires (X,Y).
  — Si $\rho_{X,Y}$ est proche de 1 ou -1, la dépendance linéaire entre X et Y est importante.
  — Si $\rho_{X,Y}$ est proche de 0 les deux variables sont linéairement indépendantes.
  Attention toutefois à ne pas confondre "indépendance linéaire" et "indépendance" : si $\rho_{X,Y} = 0$ alors X et Y sont linéairement indépendantes mais elles ne sont pas forcément indépendantes : il peut exister une dépendance non linéaire entre les variables, par exemple $Y = e^X, \ln(X)$,...
- Le signe de $\rho_{X,Y}$ (et de $\mathrm{Cov}(X,Y)$) indique le sens d'évolution d'une variable par rapport à l'autre :
  — si $\rho_{X,Y} > 0$, alors les deux variables évoluent en moyenne dans le même sens.
  Exemple : X =température extérieure, Y =consommation de crèmes glacées.
  — si $\rho_{X,Y} < 0$, les deux variables évoluent en moyenne en sens inverse.
  Exemple : X =température extérieur, Y =consommation de raclette.