TD 6 -Couples de Variables aléatoires discrètes

Exercice 1.
On considère un couple (X,Y) de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour lequel il existe un réel a tel que la loi de (X,Y) soit définie par : $\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{j!}\dfrac{a}{2^{i+j}}$.

1. Déterminer a.
2. Déterminer les lois marginales.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. **[QSP HEC 2014]
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{a}{(i+j+1)!}.$$

Déterminer le réel a. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. *
On désigne par r un entier naturel non nul.
Une personne désire joindre r correspondants. On admet que les appels constituent des expériences aléatoires indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est égale à $p\in]0,1[$. On pose $q=1-p$.
La personne essaie d'appeler les r correspondants un joour donné, puis essaie d'appeler le lendemain ceux qu'elle n'a pu joindre la veille, et ainsi de suite.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de correspondants joints, <u>en tout</u>, à l'issue des n premiers jours (si X_{n-1} a pris la valeur r, la personne ne rappelle aucun correspondant et on pose $X_n=r$).
On désigne par Z la variable aléatoire égale au nombre de jours nécessaires à la personne pour joindre pour la première fois tous ses correspondants.

1. Quelle est la loi de X_1 ?
2. Soit i et j deux entier naturels tels que $0\leq i\leq j\leq r$.
   (a) Déterminer $P_{(X_1=i)}(X_2=j)$.
   (b) Etablir la formule $\binom{r-i}{j-i}ri = \binom{r}{j}\binom{j}{i}$.
3. Montrer que X_2 suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
4. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, X_n suit la loi binomiale de $\mathcal{B}(r,1-q^n)$
5. Ecrire l'évènement $(Z\leq n)$ à l'aide de la variable aléatoire X_n.
6. En déduire $P(Z\leq n)$ puis la loi de Z.

Exercice 4.
Soient x et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.
Justifier que $\dfrac{X}{1+Y}$ possède une espérance et la calculer.

Exercice 5. *
Soient X et Y deux variables indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ telles

que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit une matrice $A(\omega)$ par :

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega)-1 \\ Y(\omega)-1 & X(\omega) \end{pmatrix}$$

Déterminer la probabilité que $A(\omega)$ soit inversible.

Exercice 6. *
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, telles que X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y suit la loi $\mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de X sachant $(X+Y=n)$.

Exercice 7. **
Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et suivant la même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1. Calculer $P(X=Y)$.
2. Déterminer la loi de $Z = X+Y$. (*Indication : on pourra distinguer les cas $k \leq n+1$ et $k > n+1$*)
3. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 8. **[QSP HEC 2012]
Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1,2\}$, $P(Y=1) = P(Y=2) = \dfrac{1}{2}$.
On pose $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Exercice 9. **[QSP ESCP 2016]
Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et $p \in]0,1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé et telles que X suit la loi binomial $\mathcal{B}(n,p)$ et Y est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.
Que pensez-vous de l'équivalence suivante : Y suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ si, et seulement si, $X+Y$ suit la loi $\mathcal{B}(2n,p)$?

Exercice 10. ***[Oral HEC 2007]
On considère deux variables aléatoires X et Y, discrètes, définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère une partie D (respectivement Δ) de $\mathbb{R}$, en bijection avec $\mathbb{N}$, dans laquelle X (resp. Y) prend presque sûrement ses valeurs, et on indexe bijectivement les élèments de D (resp. Δ) de sorte que $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\Delta = y_n, n \in \mathbb{N}\}$). On suppose que X et Y sont indépendantes et que X et $X+Y$ ont même loi.

1. On considère une série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} a_n$, qui est convergente.
   Justifier l'existence du nombre $M = \max_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$. En déduire que l'ensemble $\{P(X=x), x \in \mathbb{R}\}$ admet un plus grand élément.
   Soit alors a un réel tel que $P(X=a) = \max\{P(X=x), x \in \mathbb{R}\}$.
2. (a) Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $P(X=a-y) = P(X=a)$ ou $P(Y=y) = 0$.
   (b) En déduire que la variable aléatoire Y est finie.
3. Soit μ un réel appartenant à l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}, P(Y=y) \neq 0\}$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = a - n\mu) = P(X=a)$.
4. Montrer que la variable Y est presque sûrement nulle.

Exercice 11.
Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

X \ Y	b_1	b_1	b_3
a_1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
a_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	α

avec $a_i \neq a_j$ et $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$.

1. Que vaut α ? Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{(a_2 - a_1)(2b_1 - b_2 - b_3)}{25}$
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 12.
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de Bernoulli.

1. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = P((X = 1) \cap (Y = 1)) - P(X = 1)P(Y = 1)$.
2. Montrer que deux variables aléatoires de Bernoulli sont indépendantes si, et seulement si, elles sont non corrélées.

Exercice 13. **
Soit X et Y des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2. Montrer que

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \frac{1}{4}.$$

Exercice 14. *
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules successivement et sans remise dans cette urne. Soit X la variable aléatoire égale au premier numéro obtenu et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro obtenu.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) ainsi que ses lois marginales.
2. Montrer que $E(XY) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}$.
3. En déduire la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.
4. Exprimer sous forme factorisée la variance $V(X + Y)$.

Exercice 15. *
Soient $p \in]0, 1[$ et $n > 2$. On considère n joueurs de basket-ball qui tirent chacun deux lancers francs. On considère qu'à chaque lancer, un joueur a une probabilité p de marquer, et que les deux lancers sont indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué leur premier lancer franc, et Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué au moins un lancer franc.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale, donner son espérance et se variance.
3. On pose $Y = Z - X$. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 16. *
On lance n dés équilibrés à 6 faces. On note x le nombre de numéros disctincts qui sont sortis lors des n lancers, et pour tout $i \in \{1, ..., 6\}$, on note X_i, la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si le numéro i est apparu.

1. Déterminer la loi des variables X_i.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Pour tout $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$, déterminer la loi de $X_i X_j$. En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer $V(X)$.

Exercice 17. *
On suppose que le nombre de personnes qui se présentent à l'entrée d'un cinéma en une heure est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le cinéma comporte $N \geq 3$ caisses, et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les N. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on note X_i le nombre de personnes ayant choisi la caisse numéro i.

1. Déterminer la loi de X_i conditionnellement à l'évènement $(X = n)$, puis la loi de X_i.
2. Déterminer, sans nouveaux calculs la loi de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.
4. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X_1 et X.