Systèmes différentiels

ECG2 - mathématiques appliquées

Rappel de méthode

Résoudre $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable.

1. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre.
2. Réunir ces bases pour obtenir une base $(U_1, \dots, U_n)$ de vecteurs propres ; noter λ_i la valeur propre associée à U_i.
3. Appliquer directement le théorème : les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$\boxed{X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} U_n, \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}.}$$

Il y a un terme par vecteur de la base ; les valeurs propres ne sont pas nécessairement distinctes.

Problème de Cauchy. Utiliser $X(t_0) = X_0$ pour déterminer les constantes. L'existence et l'unicité de la solution sont admises.
Si A n'est pas diagonalisable, suivre l'indication de l'énoncé : combinaison des équations, changement de fonctions ou changement de base indiqué.

1. Exercices d'application

Pour les **exercices 1 à 4** :

1. Résoudre le système différentiel en passant par son écriture matricielle.
2. Résoudre le problème de Cauchy associé aux conditions initiales données.

Exercice 1 Première résolution

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Éléments de correction.
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\det(A - \lambda I_2) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$.

$$E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs propres forment une base : A est diagonalisable. Les solutions sont

$$X(t) = \alpha e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

À $t = 0$, $\alpha + \beta = 1$ et $-\alpha + \beta = 0$, d'où $\alpha = \beta = 1/2$.

$$\boxed{x(t) = \tfrac{1}{2}(e^{t} + e^{3t}), \quad y(t) = \tfrac{1}{2}(-e^{t} + e^{3t}).}$$

Exercice 2 Convergence vers l'origine

$$\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = x - 2y, \end{cases} \qquad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$$

3. Montrer que toutes les solutions convergent vers $(0, 0)$ lorsque $t \to +\infty$.

Éléments de correction.
$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $(\lambda + 1)(\lambda + 3)$.

$$E_{-1} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{-3} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont distinctes : A est diagonalisable et

$$X(t) = \alpha e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les conditions initiales donnent $\alpha + \beta = 2$ et $\alpha - \beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 1$.

$$\boxed{x(t) = e^{-t} + e^{-3t}, \quad y(t) = e^{-t} - e^{-3t}.}$$

Pour tous α, β, les deux exponentielles tendent vers 0 : toutes les solutions convergent vers l'origine.

Exercice 3 Plusieurs états d'équilibre

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = 2x - 2y, \end{cases} \qquad x(0) = 3, \quad y(0) = 0.$$

3. Déterminer les états d'équilibre du système.
4. Montrer que la solution du problème de Cauchy converge et préciser sa limite.

Éléments de correction.
$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $\det(A - \lambda I_2) = \lambda(\lambda + 3)$.

$$E_0 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{-3} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

A est diagonalisable ; les solutions sont

$$X(t) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

À $t = 0$, $\alpha + \beta = 3$ et $\alpha - 2\beta = 0$, donc $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

$$\boxed{x(t) = 2 + e^{-3t}, \quad y(t) = 2 - 2e^{-3t}.}$$

Les équilibres sont les (a, a), $a \in \mathbb{R}$, car $\mathrm{Ker}\, A = E_0$. La solution de Cauchy tend vers $\boxed{(2, 2)}$.

Exercice 4 Un système de trois équations

$$\begin{cases} x' = -3x + y + z, \\ y' = x - 3y + z, \\ z' = x + y - 3z, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Pour rechercher les valeurs propres, on commencera par vérifier que $A^2 + 5A + 4I_3 = 0$.

3. Déterminer la limite en $+\infty$ de toute solution du système.

Éléments de correction.
$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et

$$A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $A^2 + 5A + 4I_3 = 0$; les valeurs propres possibles sont -1 et -4.

$$E_{-1} = \mathrm{Vect}(U_1), \quad E_{-4} = \mathrm{Vect}(U_2, U_3),$$

où $U_1 = (1, 1, 1)^t$, $U_2 = (1, -1, 0)^t$ et $U_3 = (1, 0, -1)^t$. Les dimensions valent 1 et 2 : les trois vecteurs forment une base propre.

$$X(t) = \alpha e^{-t} U_1 + \beta e^{-4t} U_2 + \gamma e^{-4t} U_3.$$

Les conditions initiales imposent $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$, donc

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t}, \\ y(t) = z(t) = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-4t}). \end{array}}$$

Toutes les solutions convergent vers $(0, 0, 0)$: les deux valeurs propres sont strictement négatives.

Exercice 5 Une matrice non diagonalisable

On considère $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x. \end{cases}$

1. Écrire sa matrice A, puis montrer qu'elle possède une unique valeur propre et qu'elle n'est pas diagonalisable.
2. Pour une solution (x, y), on pose $u = x + y$. Montrer que $u' = u$, puis déterminer la forme de u.
3. On pose $v(t) = e^{-t}x(t)$. Exprimer v' à l'aide de u, puis déterminer x et y.
4. En déduire l'ensemble des solutions du système.
5. Déterminer la solution vérifiant $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.

Éléments de correction.
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Son déterminant $\det(A - \lambda I_2) = (\lambda - 1)^2$ donne l'unique valeur propre 1. Or $E_1 = \mathrm{Vect}((1, -1)^t)$, de dimension $1 < 2$: A n'est pas diagonalisable.
$u' = x' + y' = x + y = u$, donc $u(t) = Ke^t$. Puis

$$v'(t) = e^{-t}(x' - x) = e^{-t}u(t) = K.$$

Ainsi $v(t) = C + Kt$, et toutes les solutions sont

$$\boxed{x(t) = (C + Kt)e^t, \quad y(t) = (K - C - Kt)e^t.}$$

Réciproquement, ces fonctions vérifient bien les deux équations. Pour $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, on trouve $C = K = 1$:

$$\boxed{x(t) = (1 + t)e^t, \qquad y(t) = -te^t.}$$

Exercice 6 D'une équation d'ordre 2 à un système

On considère $f'' + 3f' + 2f = 0$.

1. En posant $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}$, montrer que cette équation équivaut à un système $X' = AX$, dont on précisera la matrice.
2. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre.
3. Appliquer le théorème sur les systèmes différentiels pour retrouver l'ensemble des solutions de l'équation scalaire.
4. Déterminer la solution vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Éléments de correction.
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, de valeurs propres -1 et -2 ;

$$E_{-1} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_{-2} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice est diagonalisable et

$$X(t) = \alpha e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Donc $f(t) = \alpha e^{-t} + \beta e^{-2t}$. Les conditions donnent $\alpha + \beta = 1$, $-\alpha - 2\beta = 0$, soit $\alpha = 2$, $\beta = -1$:

$$\boxed{f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}.}$$

2. Problèmes

Problème 1 emlyon 2023 – Exercice 2

Deux systèmes différentiels

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I – Réduction de la matrice A

1. a. Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?
   b. Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.
   c. Donner une base de E_2.
   d. Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?
2. a. Dans cette sous-question M est une matrice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?
   b. En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.
3. Donner une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

Partie II – Un système différentiel

On considère le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} x' = 3x + y + z, \\ y' = x + 3y + z, \\ z' = x + y + 3z, \end{cases}$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S).
5. a. Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?
   b. Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Partie III – Un second système différentiel

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B.
7. La matrice B est-elle diagonalisable ?
8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.
   a. Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b. Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?
   c. Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.
9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x' = -x - 4y, \\ y' = x + 3y, \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Éléments de correction.
Partie I.

1. $A-2I$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1 : son rang est 1. Le théorème du rang donne $\dim E_2 = 2$, donc 2 est valeur propre et
$$E_2 = \{(x,y,z)^t : x+y+z=0\} = \mathrm{Vect}(U_1, U_2),$$
avec $U_1=(1,-1,0)^t$, $U_2=(1,0,-1)^t$, qui sont libres. Les sous-espaces propres distincts sont en somme directe : il reste au plus une autre valeur propre.
2. Les coordonnées de MU sont les sommes des coefficients des lignes de M. Ainsi $AU = 5U$: 5 est valeur propre. Les dimensions des espaces propres sont au moins 2 et 1 et leur somme ne peut dépasser 3 ; donc $E_5 = \mathrm{Vect}(U)$ et $\mathrm{Sp}(A) = \{2,5\}$.
3. On peut choisir
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \mathrm{diag}(2,2,5).$$
Ses colonnes forment une base propre, donc P est inversible et $A = PDP^{-1}$.

Partie II.

4. Application directe du théorème :
$$\boxed{X(t) = ae^{2t}U_1 + be^{2t}U_2 + ce^{5t}U, \qquad a,b,c \in \mathbb{R}.}$$
Soit $x(t) = (a+b)e^{2t} + ce^{5t}$, $y(t) = -ae^{2t} + ce^{5t}$, $z(t) = -be^{2t} + ce^{5t}$.
5. Le théorème d'existence et d'unicité pour un problème de Cauchy s'applique. Le vecteur initial est U_1 : $a=1$, $b=c=0$. Ainsi
$$\boxed{X_0(t) = e^{2t}(1,-1,0)^t.}$$

Partie III.

6. $\det(B-\lambda I_2) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$. La seule valeur propre est 1.
7. $E_1(B) = \mathrm{Vect}((2,-1)^t)$ est de dimension $1<2$: B n'est pas diagonalisable.
8. Les vecteurs v_1, v_2 sont libres. On calcule $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = v_1 + v_2$, d'où
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
La matrice Q, de colonnes v_1, v_2, est inversible et $B = QTQ^{-1}$.
9. On pose $Y = Q^{-1}X = (u,v)^t$. Alors $X' = BX \iff Y' = TY$, soit $v' = v$ et $u' = u + v$. On obtient $v(t) = be^t$, puis, en dérivant $e^{-t}u(t)$, $u(t) = (a+bt)e^t$. Comme $X = QY$,
$$\boxed{x(t) = \big(2a + (2t-1)b\big)e^t, \qquad y(t) = -(a+bt)e^t, \qquad a,b \in \mathbb{R}.}$$

Problème 2 Voir ECRICOME 2026 – Exercice 3, parties I et II

Problème 2 D'après ECRICOME 2026 – Exercice 3, parties I et II

Adaptation synthétique. Énoncé officiel : exercice 3, parties I et II.

Partie I – Une combinaison des inconnues

On étudie
$$x' = x + y, \qquad y' = -x - y, \qquad x(0) = y(0) = 1.$$

1. Poser $s = x + y$; calculer s', puis déterminer s.
2. En déduire les fonctions x et y satisfaisant ce problème de Cauchy.

Partie II – Une résolution matricielle

On donne
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer P^{-1}. Déterminer le spectre de A et préciser si A est diagonalisable.
4. Vérifier $P^{-1}AP = J$. Déterminer les états d'équilibre de $X' = AX$.
5. Poser $Y = P^{-1}X$. Montrer l'équivalence entre $X' = AX$ et $Y' = JY$, puis résoudre ce dernier système.
6. Revenir à X, donner la solution générale, puis retrouver celle de la partie I.

Éléments de correction.
Partie I. $s' = x' + y' = 0$ et $s(0) = 2$, donc $s(t) = 2$. Ainsi $x' = 2$, $y' = -2$. Les conditions initiales donnent

$$\boxed{x(t) = 1 + 2t, \qquad y(t) = 1 - 2t.}$$

Partie II.

3. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = 0$ et $A \neq 0$. Toute valeur propre vérifie $\lambda^2 = 0$; $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}((1,-1)^t) \neq \{0\}$, donc $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$. L'espace propre est de dimension $1 < 2$: A n'est pas diagonalisable.
4. Le produit donne $P^{-1}AP = J$. Les équilibres vérifient $AX_e = 0$: ce sont tous les vecteurs $(a, -a)^t$, $a \in \mathbb{R}$.
5. P est constante, donc $Y' = P^{-1}X'$. Ainsi $X' = AX \iff Y' = P^{-1}APY = JY$. En écrivant $Y = (u, v)^t$, on obtient $u' = v$, $v' = 0$, donc $v(t) = b$ et $u(t) = a + bt$.
6. $X = PY = (u, v - u)^t$, d'où

$$\boxed{x(t) = a + bt, \qquad y(t) = b - a - bt, \qquad a, b \in \mathbb{R}.}$$

Les conditions $x(0) = y(0) = 1$ imposent $a = 1$ et $b = 2$, ce qui redonne la partie I.