Systèmes différentiels

ECG2 - mathématiques appliquées

Rappel de méthode

Résoudre $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable.

1. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre.
2. Réunir ces bases pour obtenir une base $(U_1, \dots, U_n)$ de vecteurs propres ; noter λ_i la valeur propre associée à U_i.
3. Appliquer directement le théorème : les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$\boxed{X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} U_n, \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}.}$$

Il y a un terme par vecteur de la base ; les valeurs propres ne sont pas nécessairement distinctes.

Problème de Cauchy. Utiliser $X(t_0) = X_0$ pour déterminer les constantes. L'existence et l'unicité de la solution sont admises.
Si A n'est pas diagonalisable, suivre l'indication de l'énoncé : combinaison des équations, changement de fonctions ou changement de base indiqué.

1. Exercices d'application

Pour les **exercices 1 à 4** :

1. Résoudre le système différentiel en passant par son écriture matricielle.
2. Résoudre le problème de Cauchy associé aux conditions initiales données.

Exercice 1 Première résolution

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Exercice 2 Convergence vers l'origine

$$\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = x - 2y, \end{cases} \qquad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$$

3. Montrer que toutes les solutions convergent vers $(0, 0)$ lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 3 Plusieurs états d'équilibre

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = 2x - 2y, \end{cases} \qquad x(0) = 3, \quad y(0) = 0.$$

3. Déterminer les états d'équilibre du système.
4. Montrer que la solution du problème de Cauchy converge et préciser sa limite.

Exercice 4 Un système de trois équations

$$\begin{cases} x' = -3x + y + z, \\ y' = x - 3y + z, \\ z' = x + y - 3z, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Pour rechercher les valeurs propres, on commencera par vérifier que $A^2 + 5A + 4I_3 = 0$.

3. Déterminer la limite en $+\infty$ de toute solution du système.

Exercice 5 Une matrice non diagonalisable

On considère $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x. \end{cases}$

1. Écrire sa matrice A, puis montrer qu'elle possède une unique valeur propre et qu'elle n'est pas diagonalisable.
2. Pour une solution (x, y), on pose $u = x + y$. Montrer que $u' = u$, puis déterminer la forme de u.
3. On pose $v(t) = e^{-t} x(t)$. Exprimer v' à l'aide de u, puis déterminer x et y.
4. En déduire l'ensemble des solutions du système.
5. Déterminer la solution vérifiant $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.

Exercice 6 D'une équation d'ordre 2 à un système

On considère $f'' + 3f' + 2f = 0$.

1. En posant $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}$, montrer que cette équation équivaut à un système $X' = AX$, dont on précisera la matrice.
2. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre.
3. Appliquer le théorème sur les systèmes différentiels pour retrouver l'ensemble des solutions de l'équation scalaire.
4. Déterminer la solution vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

2. Problèmes

Problème 1 emlyon 2023 – Exercice 2

Deux systèmes différentiels

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie I – Réduction de la matrice A

1. a. Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?
   b. Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.
   c. Donner une base de E_2.
   d. Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?
2. a. Dans cette sous-question M est une matrice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?
   b. En déduire la dernière valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.
3. Donner une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

Partie II – Un système différentiel

On considère le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} x' = 3x + y + z, \\ y' = x + 3y + z, \\ z' = x + y + 3z, \end{cases}$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S).
5. a. Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?
   b. Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Partie III – Un second système différentiel

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B.
7. La matrice B est-elle diagonalisable ?
8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.
   a. Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b. Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?
   c. Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.
9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x' = -x - 4y, \\ y' = x + 3y, \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

Problème 2 Voir ECRICOME 2026 – Exercice 3, parties I et II