Couples de variables aléatoires discrètes

ECG2 - mathématiques approfondies

Rappel de méthode

Lois marginales et conditionnelles. Préciser les supports et sommer sur les valeurs de l'autre variable :

$$\mathbb{P}(X=x)=\sum_y \mathbb{P}(X=x,Y=y)=\sum_y \mathbb{P}(Y=y)\mathbb{P}(X=x\mid Y=y).$$

Dans la seconde somme, retenir les y tels que $\mathbb{P}(Y=y)>0$. Pour une loi conditionnelle :

$$\mathbb{P}(X=x\mid Y=y)=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}.$$

Indépendance. Vérifier, pour tous les couples de valeurs possibles, $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$.
Maximum et minimum. Si X et Y sont indépendantes, poser $M=\max(X,Y)$ et $N=\min(X,Y)$, puis utiliser

$$\mathbb{P}(M\leq k)=\mathbb{P}(X\leq k)\mathbb{P}(Y\leq k),\qquad \mathbb{P}(N>k)=\mathbb{P}(X>k)\mathbb{P}(Y>k).$$

Pour une variable à valeurs entières :

$$\mathbb{P}(M=k)=\mathbb{P}(M\leq k)-\mathbb{P}(M\leq k-1),$$
$$\mathbb{P}(N=k)=\mathbb{P}(N>k-1)-\mathbb{P}(N>k).$$

Somme de variables indépendantes. Pour $S=X+Y$, décomposer selon les valeurs de X :

$$\mathbb{P}(S=s)=\sum_x \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=s-x).$$

1. Exercices d'application

Exercice 1 Une loi de couple

La loi conjointe de (X,Y) est donnée par :

$X\backslash Y$	0	1	2
0	1/12	2/12	1/12
1	2/12	1/12	5/12

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X=1]$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$ et $\mathbb{P}(X<Y)$.

Éléments de correction.
En sommant les lignes et les colonnes :

x	0	1
$\mathbb{P}(X=x)$	1/3	2/3

y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=y)$	1/4	1/4	1/2

Les variables ne sont pas indépendantes : $\mathbb{P}(X=0,Y=1)=1/6\neq(1/3)(1/4)$.
En divisant la seconde ligne par $2/3$, la loi de Y sachant $[X=1]$ est donnée, pour $y=0,1,2$, par $1/4,1/8,5/8$.
Les cases favorables donnent $\mathbb{P}(X=Y)=2/12=1/6$ et $\mathbb{P}(X<Y)=(2+1+5)/12=2/3$.

Exercice 2 Des lois conditionnelles à une loi marginale

Une urne contient trois boules numérotées 1, 2, 3. On tire une boule au hasard et on note X son numéro. Si le numéro obtenu est k, on choisit au hasard un entier parmi $0,1,\dots,k$, noté Y.

1. Donner la loi de X et la loi conditionnelle de Y sachant $[X=k]$, pour $k\in\{1,2,3\}$.
2. Déterminer la loi du couple (X,Y).
3. En déduire la loi de Y.
4. Calculer $\mathbb{P}(X=3\mid Y=1)$.

Éléments de correction.
X est uniforme sur $\{1,2,3\}$. Sachant $[X=k]$, Y est uniforme sur $\{0,\dots,k\}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X=k,Y=j)=\frac{1}{3(k+1)}$$

si $1\le k\le 3$ et $0\le j\le k$, et vaut 0 sinon.
La formule des probabilités totales donne

j	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=j)$	$13/36$	$13/36$	$7/36$	$1/12$

Par exemple $\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{13}{36}$. Enfin $\mathbb{P}(X=3\mid Y=1)=\dfrac{1/12}{13/36}=\boxed{\dfrac{3}{13}}$.

Exercice 3 Minimum et maximum de deux dés

On lance indépendamment deux dés équilibrés à six faces. On note X,Y les résultats, puis $M=\max(X,Y)$ et $N=\min(X,Y)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(M\le k)$ pour $k\in\{1,\dots,6\}$.
2. En déduire la loi de M.
3. Calculer $\mathbb{P}(N\ge k)$ pour $k\in\{1,\dots,6\}$, puis déterminer la loi de N.
4. M et N sont-elles indépendantes ?

Éléments de correction.
Les supports de M et N sont $\{1,\dots,6\}$. Par indépendance de X,Y,

$$\mathbb{P}(M\le k)=\left(\frac{k}{6}\right)^2,$$

d'où $\mathbb{P}(M=k)=\dfrac{k^2-(k-1)^2}{36}=\boxed{\dfrac{2k-1}{36}}$.
De même, $\mathbb{P}(N\ge k)=((7-k)/6)^2$, donc

$$\mathbb{P}(N=k)=\frac{(7-k)^2-(6-k)^2}{36}=\boxed{\frac{13-2k}{36}}.$$

M,N ne sont pas indépendantes : $\mathbb{P}(M=1,N=6)=0$, alors que $\mathbb{P}(M=1)\mathbb{P}(N=6)=1/36^2>0$.

Exercice 4 Deux temps d'attente

Les variables X,Y sont indépendantes et suivent les lois géométriques de paramètres respectifs $p,q\in]0,1[$ sur $\mathbb{N}^*$. Ainsi $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ pour $k\ge 1$. On pose $N=\min(X,Y)$ et $M=\max(X,Y)$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X>k)$ et $\mathbb{P}(Y>k)$ pour $k\in\mathbb{N}$.
2. Déterminer la loi de N et reconnaître une loi usuelle.
3. Déterminer $\mathbb{P}(M\le k)$ pour $k\in\mathbb{N}$.
4. En déduire la loi de M.
5. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.

Éléments de correction.
Posons $a=1-p$, $b=1-q$ et $r=1-ab=p+q-pq$. La somme d'une série géométrique donne $\mathbb{P}(X>k)=a^k$, $\mathbb{P}(Y>k)=b^k$.
Par indépendance, $\mathbb{P}(N>k)=(ab)^k$. Donc

$$\mathbb{P}(N=k)=r(ab)^{k-1}\quad(k\ge 1),$$

et $\boxed{N\hookrightarrow\mathcal{G}(r)}$.
De même, $\mathbb{P}(M\le k)=(1-a^k)(1-b^k)$ pour $k\ge 0$. En soustrayant les valeurs aux rangs k et $k-1$:

$$\mathbb{P}(M=k)=pa^{k-1}+qb^{k-1}-r(ab)^{k-1}$$

pour $k\ge 1$. Enfin les événements $[X=k,Y=k]$ sont disjoints, d'où

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=1}^{+\infty}pq(ab)^{k-1}=\boxed{\frac{pq}{p+q-pq}}.$$

Exercice 5 Somme de deux lois binomiales

Soient $n,m\in\mathbb{N}^*$, $p\in]0,1[$ et X,Y indépendantes, de lois $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$. On pose $S=X+Y$.

1. Déterminer le support de S.
2. Exprimer $\mathbb{P}(S=k)$ sous la forme d'une somme.
3. À l'aide de l'identité suivante, déterminer la loi de S :

$$\sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(n,k)}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}.$$

4. Retrouver ce résultat en interprétant X,Y comme des nombres de succès dans des épreuves de Bernoulli.

Éléments de correction.
$S(\Omega)=\{0,\dots,n+m\}$. Posons $L=\max(0,k-m)$ et $U=\min(n,k)$. Par partition selon X, puis indépendance,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S=k)&=\sum_{i=L}^{U}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)\\&=p^k(1-p)^{n+m-k}\sum_{i=L}^{U}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}\\&=\binom{n+m}{k}p^k(1-p)^{n+m-k}.\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{S\hookrightarrow\mathcal{B}(n+m,p)}$.
On retrouve ce résultat en regroupant deux blocs indépendants de n et m épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p : S compte les succès dans les $n+m$ épreuves.

Exercice 6 Somme de deux lois géométriques

Soient X, Y indépendantes, de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ sur $\mathbb{N}^*$. On pose $S = X + Y$.

1. Déterminer le support de S.
2. Pour $n \geq 2$, décomposer $[S = n]$ à l'aide des événements $[X = k, Y = n - k]$.
3. En déduire que, pour $n \geq 2$,
$$\mathbb{P}(S = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$
4. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[S = n]$ et reconnaître une loi usuelle.

Éléments de correction.
$S(\Omega) = \{2, 3, \ldots\}$ et
$$[S = n] = \bigcup_{k=1}^{n-1} [X = k, Y = n - k],$$
union disjointe. Par indépendance,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1} p(1-p)^{n-k-1} \\ &= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.\end{aligned}$$
Pour $1 \leq k \leq n-1$,
$$\mathbb{P}(X = k \mid S = n) = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}.$$
La loi conditionnelle est donc uniforme sur $\{1, \ldots, n-1\}$.

Exercice 7 Somme de deux lois de Poisson

Soient X, Y indépendantes, de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On pose $S = X + Y$.

1. Exprimer $\mathbb{P}(S = n)$ sous la forme d'une somme, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. À l'aide de la formule du binôme, déterminer la loi de S.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = k \mid S = n)$ pour $0 \leq k \leq n$.
4. Reconnaître cette loi conditionnelle.

Éléments de correction.
Pour $n \in \mathbb{N}$, la partition selon X et l'indépendance donnent
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = n) &= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}.\end{aligned}$$
Donc $\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)}$.
Pour $0 \leq k \leq n$, en divisant la probabilité de $[X = k, Y = n - k]$ par celle de $[S = n]$:
$$\mathbb{P}(X = k \mid S = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.$$
C'est la loi $\boxed{\mathcal{B}(n, \lambda/(\lambda+\mu))}$, y compris la loi certaine en 0 si $n = 0$.

2. Problèmes de concours

Problème 1 d'après EDHEC 2023 – Mathématiques approfondies, exercice 3

On lance une pièce, indépendamment à chaque lancer. La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$; on pose $q = 1 - p$. La variable X compte les faces obtenues avant le premier pile. On définit Q, R par
$$X = 3Q + R, \qquad Q \in \mathbb{N}, \quad R \in \{0, 1, 2\}.$$

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, décrire $[Q = k]$ à l'aide de X. Déterminer la loi de Q et reconnaître une loi géométrique décalée.
3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(R = 0)$, $\mathbb{P}(R = 1)$ et $\mathbb{P}(R = 2)$.
4. Déterminer la loi conjointe de (Q, R) et établir l'indépendance de Q et R.
5. On dispose de `rd.geometric(p)`, qui simule une loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$. Écrire une fonction Python renvoyant une simulation du triplet (X, Q, R).

Éléments de correction.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, $[X = k]$ correspond à k faces suivies d'un pile ; l'indépendance des lancers donne
$$\mathbb{P}(X = k) = q^k p.$$
L'événement « ne jamais obtenir pile » est de probabilité nulle puisque $q^n \to 0$; on peut y définir X arbitrairement. Comme $X + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$,
$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{q}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.}$$
2. $[Q = k] = [X = 3k] \cup [X = 3k+1] \cup [X = 3k+2]$, union disjointe. Donc
$$\mathbb{P}(Q = k) = pq^{3k}(1 + q + q^2) = (1 - q^3)(q^3)^k.$$
Ainsi $Q + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^3)$.

3. Pour $r \in \{0,1,2\}$, $[R=r]$ est la réunion disjointe des événements $[X=3k+r]$, $k \in \mathbb{N}$. Donc

$$\mathbb{P}(R=r) = \sum_{k=0}^{+\infty} pq^{3k+r} = \frac{pq^r}{1-q^3} = \boxed{\frac{q^r}{1+q+q^2}}.$$

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0,1,2\}$,

$$\mathbb{P}(Q=k, R=r) = \mathbb{P}(X=3k+r) = pq^{3k+r}.$$

Or

$$\mathbb{P}(Q=k)\mathbb{P}(R=r) = (1-q^3)q^{3k}\frac{pq^r}{1-q^3} = pq^{3k+r}.$$

L'égalité pour tous les couples prouve l'indépendance.

5. Une simulation est donnée par :

```
import numpy.random as rd

def simulation(p):
    X = int(rd.geometric(p)) - 1
    Q = X // 3
    R = X % 3
    return X, Q, R
```

La division entière fournit Q, et l'opérateur % fournit R.

Problème 2 d'après EDHEC 2005 – ECS, problème, partie 1

On choisit équiprobablement l'un de deux jetons. Le premier porte les numéros 0 et 1 ; le second porte 1 sur ses deux faces. On lance ensuite le jeton choisi, les lancers étant indépendants conditionnellement à ce choix. On note E l'événement « le premier jeton a été choisi ».

X désigne le rang du premier 0, et Y celui du premier 1 ; un rang vaut 0 si le numéro considéré n'apparaît jamais.

1. Calculer la probabilité d'obtenir n fois 1 lors des n premiers lancers. Sachant ces résultats, calculer la probabilité de E et sa limite.
2. Déterminer la loi de X, puis $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Faire de même pour Y.
4. Déterminer la loi de $S = \max(X,Y)$; reconnaître une loi usuelle et donner son espérance et sa variance.
5. Déterminer la loi de $I = \min(X,Y)$, son espérance et sa variance.

Éléments de correction.

1. Notons A_n l'événement « les n premiers résultats valent 1 ». Par les probabilités totales,

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(A_n \mid E) + \mathbb{P}(\overline{E})\mathbb{P}(A_n \mid \overline{E}) = \frac{1}{2}\left(2^{-n}+1\right).$$

La formule des probabilités conditionnelles donne

$$\mathbb{P}(E \mid A_n) = \frac{2^{-n-1}}{(1+2^{-n})/2} = \boxed{\frac{1}{2^n+1}} \longrightarrow 0.$$

Une longue suite de 1 rend de plus en plus probable le choix du second jeton.

2. Pour $k \geq 1$, obtenir le premier 0 au rang k impose de choisir le premier jeton, puis d'obtenir $k-1$ fois 1 et enfin 0. Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = 2^{-k-1}\ (k \geq 1), \qquad \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}.}$$

La seconde égalité résulte aussi de $\sum_{k\geq 1} 2^{-k-1} = 1/2$. Sachant E, X suit $\mathcal{G}(1/2)$; sachant $\overline{E}$, $X=0$. Pour $G \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$, $\mathbb{E}(G)=2$, $\mathbb{V}(G)=2$, donc $\mathbb{E}(G^2)=6$. Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = \tfrac{1}{2}\times 2 = 1, \qquad \mathbb{E}(X^2) = \tfrac{1}{2}\times 6 = 3, \qquad \boxed{\mathbb{V}(X) = 3 - 1^2 = 2}.$$

3. Sachant E, Y suit $\mathcal{G}(1/2)$; sachant $\overline{E}$, $Y=1$. D'où

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=0)=0, \quad \mathbb{P}(Y=1)=\frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(Y=k)=2^{-k-1}\ (k\geq 2).}$$

Les moments valent

$$\mathbb{E}(Y) = \tfrac{1}{2}\times 2 + \tfrac{1}{2}\times 1 = \frac{3}{2}, \qquad \mathbb{E}(Y^2) = \tfrac{1}{2}\times 6 + \tfrac{1}{2}\times 1 = \frac{7}{2}.$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{V}(Y) = \frac{7}{2} - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}}$.

4. Avec le second jeton, $(X, Y) = (0, 1)$ et $S = 1$. Avec le premier, l'un des rangs vaut 1 et l'autre est au moins 2, presque sûrement. Donc $\mathbb{P}(S = 1) = 1/2$. Pour $k \geq 2$, les événements $[X = k]$ et $[Y = k]$ sont disjoints : le premier impose un premier résultat 1, le second un premier résultat 0. Leur réunion est $[S = k]$ presque sûrement. Ainsi

$$\mathbb{P}(S = k) = 2^{-k-1} + 2^{-k-1} = 2^{-k} \quad (k \geq 2).$$

La formule vaut aussi pour $k = 1$:

$$\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2), \qquad \mathbb{E}(S) = 2, \qquad \mathbb{V}(S) = 2.}$$

5. Avec le premier jeton, les deux numéros apparaissent presque sûrement et l'un apparaît dès le premier lancer : $I = 1$. Avec le second, $X = 0$ et $Y = 1$, donc $I = 0$. Par conséquent

$$\boxed{I \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2), \qquad \mathbb{E}(I) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{V}(I) = \frac{1}{4}.}$$

Les variables X, Y ne sont pas indépendantes ; on ne peut donc pas multiplier leurs probabilités pour calculer les lois de S et I.