

Chapitre 1

Suites usuelles et récurrence

1 Les suites de nombres réels

1.1 Qu'est-ce qu'une suite ?

Définition 1.1.1.

Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ ou d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On la note

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

ou plus simplement $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 1.1.2.

- Lorsque dans la définition de la suite (u_n) le terme u_n ne dépend que de n on dit que la suite est définie de manière explicite.
- Lorsque dans la définition de la suite (u_n) le terme u_n dépend des termes précédents, on dit qu'elle est définie de manière récursive.

Exemple 1.1.1. Calculer les valeurs de u_1 et u_2 pour les suites suivantes.

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 4$.

2. $u_n = 2^n + 3$.

1.2 Encadrement

Définition 1.2.1. La suite $(u_n)_{n \in I}$ définie sur $I \subset \mathbb{N}$ est :

- **majorée** si et seulement si :

il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in I$, $u_n \leq M$

- **minorée** si et seulement si :

il existe une constante $m \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in I$, $u_n \geq m$

- **bornée** si et seulement si elle est majorée et minorée.

Illustration 1.2.1. Représenter un exemple de chaque type de suite.

Suite majorée :

Suite minorée :

Suite bornée :



Exemple 1.2.2. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont-elles bornées ?

1. $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$

2. $v_1 = 2$ et $v_{n+1} = 2 \times v_n.$

Proposition 1.2.1. Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée.

Exemple 1.2.3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $u_n = (-3)^n$, est-elle bornée ?

1.3 Sens de variation

Définition 1.3.1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- **croissante** si et seulement si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$$

- **décroissante** si et seulement si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$$

- **monotone** si elle ne change pas de sens de variation
- **stationnaire** si et seulement si

$$\text{il existe une constante } a \in \mathbb{R} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = a$$

- **périodique** de période $T \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n$$

Remarque 1.3.1. « À partir d'un certain rang » signifie que les propriétés précédentes sont vraies, mais pas pour les premiers termes. Par exemple, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 3 signifie que pour tout $n \geq 3$, $u_{n+1} \geq u_n$, mais ce n'est pas forcément vrai pour les termes u_1 ou u_2 .

Méthode 1.1. Pour déterminer la monotonie d'une suite (u_n) , on choisit l'une de ces deux méthodes :

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on calcule $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n \geq 0$	$u_{n+1} - u_n \leq 0$	$u_{n+1} - u_n$ change de signe selon les valeurs de n
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non monotone

2. On fixe $n \in \mathbb{N}$, on vérifie que $u_n > 0$ et on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$	$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$	$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ change de position par rapport à 1 selon les valeurs de n
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non monotone

Exemple 1.3.1. Étudier les propriétés de monotonie des suites (u_n) et (v_n) .

$$1. u_n = \frac{n}{n+1}$$

$$2. v_n = (-1)^n$$

2 Suites récurrentes usuelles

2.1 Suites arithmétiques

Définition 2.1.1. La suite (u_n) est **arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$** à partir du rang n_0 si

$$\text{pour tout } n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Méthode 2.1. Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on calcule $u_{n+1} - u_n$. On obtient une constante, c'est la raison r de la suite.

Exemple 2.1.1. 1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1 + 2n$ pour $n \geq 0$ est une suite arithmétique.

2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_0 = 1, v_1 = 5, v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0$ est une suite arithmétique.

Théorème 2.1.1 (Expression en fonction de n).

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r à partir de n_0 . L'expression de la suite en fonction de n est la suivante :

$$\text{pour tout } n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r.$$

Exemple 2.1.2. Donner l'expression en fonction de n de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'exemple ??.

Proposition 2.1.2 (Monotonie).

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . La suite est monotone :

$r \geq 0$	$r \leq 0$
(u_n) croissante	(u_n) décroissante

Démonstration.

□

Proposition 2.1.3 (Somme des premiers termes de la suite).

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

$$\sum_{k=n_0}^n u_k = (n - n_0 + 1) \frac{u_n + u_{n_0}}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Exemple 2.1.3. Calculer $\sum_{n=3}^7 v_n$ où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de l'exemple ??.

2.2 Suites géométriques

Définition 2.2.1. La suite (u_n) est **géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$** si et seulement si

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

Méthode 2.2. Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique, on vérifie qu'elle ne s'annule pas, puis on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On obtient une constante, c'est la raison q de la suite.

Remarque 2.2.1. Attention dans cette méthode il faut s'assurer que $u_n \neq 0$ pour tout n . Si ce n'est pas le cas, on peut également partir de u_{n+1} et montrer que $u_{n+1} = qu_n$ avec q une constante.

Exemple 2.2.1. 1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = 3 \times 2^n$ est géométrique.

2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ où $u_0 = 1$, $u_1 = 4$,
 $u_{n+2} - u_{n+1} = 2(u_{n+1} - u_n)$ est géométrique.

Théorème 2.2.1 (Expression en fonction de n).

Soit (u_n) géométrique de raison q à partir de n_0 . L'expression de la suite en fonction de n est la suivante :

$$\text{pour tout } n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Exemple 2.2.2. Donner l'expression en fonction de n de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'exemple ??.

Proposition 2.2.2 (Monotonie).

Soit (u_n) géométrique de raison q . Les variations de la suite sont les suivantes :

	$q < 0$	$0 < q < 1$	$q > 1$
$u_0 > 0$	(u_n) non monotone	(u_n) décroissante	(u_n) croissante
$u_0 < 0$	(u_n) non monotone	(u_n) croissante	(u_n) décroissante

Démonstration.

□

Proposition 2.2.3 (Somme des premiers termes de la suite).

Soit (u_n) géométrique de raison q .

- Si $q \neq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^n u_k &= u_{n_0} \times \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} \\ &= \frac{u_{n_0} - u_{n+1}}{1 - q} = \frac{\text{premier terme} - \text{premier terme qui manque}}{1 - \text{raison}}. \end{aligned}$$

- Si $q = 1$, la suite est stationnaire et

$$\sum_{k=n_0}^n u_k = (n - n_0 + 1) u_{n_0} = \text{nombre de termes} \times \text{premier terme}.$$

Exemple 2.2.3. Calculer $\sum_{n=2}^8 u_n$ où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de l'exemple ??.

2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 2.3.1. La suite (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe a et b tels que

$$\text{pour tout } n, \quad u_{n+1} = a u_n + b$$

Méthode 2.3. On suppose $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Pour déterminer l'expression d'une suite arithmético-géométrique en fonction de n , on procède comme suit :

1. On résout l'équation $x = ax + b$. On note α la solution.
2. On pose $v_n = u_n - \alpha$. On montre que (v_n) est une suite géométrique de raison a :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= a \times u_n + b & \text{(L1)} \\ \alpha &= a \times \alpha + b & \text{(L2)} \end{cases}$$

donc en faisant L1-L2, on obtient :

$$\underbrace{u_{n+1} - \alpha}_{v_{n+1}} = a \times \underbrace{(u_n - \alpha)}_{v_n} \Leftrightarrow v_{n+1} = a \times v_n.$$

3. On en déduit l'expression de v_n en fonction de n .
4. On utilise la relation $u_n = v_n + \alpha$ pour obtenir l'expression de u_n en fonction de n .

Exemple 2.3.1. 1. Étudier la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

2. Calculer $\sum_{k=0}^6 u_k$.

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 2.4.1. La suite (u_n) est **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

Méthode 2.4. Pour déterminer l'expression d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 en fonction de n , on procède comme suit :

1. On écrit l'équation caractéristique correspondante :

$$x^2 - ax - b = 0$$

et on calcule le discriminant associé.

2. On distingue trois cas selon le signe du discriminant :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines	r_1 et r_2	r_0	pas de solution réelle
Expression de (u_n)	$u_n = Ar_1^n + Br_2^n$	$u_n = r_0^n(An + B)$	on ne peut pas répondre

où A et $B \in \mathbb{R}$ sont des constantes à déterminer.

3. Pour déterminer A et B , on écrit les équations correspondant à $n = 0$ et $n = 1$. Elles forment un système que l'on résout.

Exemple 2.4.1. Donner l'expression en fonction de n de la suite de Fibonacci définie par $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

3 La récurrence

3.1 Le raisonnement par récurrence

Méthode 3.1. Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ dépendant de l'entier n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on utilise un **raisonnement par récurrence** en trois étapes :

1. **Initialisation** : La propriété est vraie au rang initial n_0 .
2. **Hérédité** : Soit $n \geq n_0$, on suppose que la propriété est vraie au rang n . On montre que la propriété est vraie au rang $n + 1$.
3. **Conclusion** : La propriété est initialisée et elle est héréditaire, donc par principe de récurrence pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 3.1.1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout entier naturel n . Démontrer que $u_n > 1$ pour tout n et en déduire le sens de variation de cette suite.

Exemple 3.1.2. Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité $2^n > n$.

3.2 Le raisonnement par récurrence double

Méthode 3.2. Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ dépendant de l'entier n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on peut utiliser un **raisonnement par récurrence double** en trois étapes :

1. **Initialisation** : La propriété est vraie au rang initial n_0 et au rang $n_0 + 1$.
2. **Hérédité** : Soit $n \geq n_0$, on suppose que la propriété est vraie au rangs n et $n + 1$. On montre que la propriété est vraie au rang $n + 2$.
3. **Conclusion** : La propriété est initialisée et elle est héréditaire, donc par principe de récurrence double pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 3.2.1. Démontrer que si la suite (u_n) est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 3 \\ \text{Pour tout } n \geq 0, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

alors on a :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 2^n$$

3.3 Le raisonnement par récurrence forte

Méthode 3.3. Avec les mêmes notations, on définit le **raisonnement par récurrence forte** en trois étapes :

1. **Initialisation** : La propriété est vraie au rang initial n_0 .
2. **Hérédité** : Soit $n \geq n_0$, on suppose que la propriété est vraie **pour tout entier** $k \in [n_0, n]$. On montre que la propriété est vraie au rang $n + 1$.
3. **Conclusion** : La propriété est initialisée et elle est héréditaire, donc par principe de récurrence forte pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 3.3.1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^{n-1}$.

3.4 Application au calcul de sommes et de produits

Exemple 3.4.1. Montrer par récurrence les égalités suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$3. \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exemple 3.4.2. Montrer par récurrence que, si $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, alors :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$