

Chapitre 10

Suites numériques

1 Convergence des suites

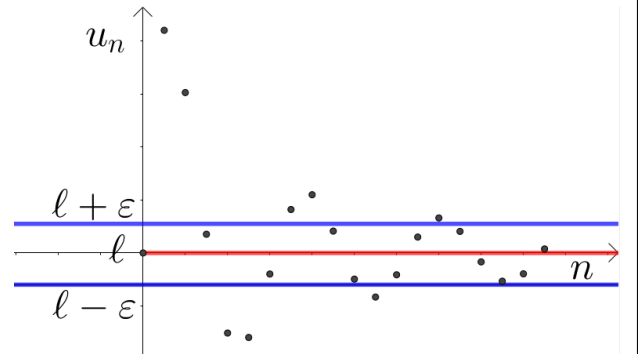
1.1 Le cas des limites finies

Définition 1.1.1.

On dit que la suite (u_n) converge vers le réel ℓ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \epsilon$$

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.



Exemple 1.1.1. Démontrer avec un dessin les propriétés suivantes.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Rightarrow (\exists n_0, \forall n > n_0, -1 < u_n < 1).$

2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l > 0$ alors $u_n > \frac{l}{2}$ à partir d'un certain rang.

Proposition 1.1.1. La limite d'une suite convergente est unique.

Proposition 1.1.2. Toute suite convergente est bornée.

Exemple 1.1.2. Énoncer la contraposée de cette proposition et démontrer que la suite $u_n = 2^n$ n'est pas convergente.

Proposition 1.1.3. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite si et seulement si la suite (u_n) converge vers cette limite.

Exemple 1.1.3. Démontrer que la suite $u_n = (-1)^n$ est divergente.

1.2 Convergence et opérations sur les suites

Théorème 1.2.1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ' .

1. $(u_n + v_n)$ est une suite convergente de limite $\ell + \ell'$.
2. Soit $k \in \mathbb{R}$, $(k u_n)$ est une suite convergente de limite $k \ell$.
3. $(u_n \times v_n)$ est une suite convergente de limite $\ell \times \ell'$.
4. Si $\ell \neq 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \neq 0$. Alors la suite définie pour $n \geq n_0$ par $\frac{1}{u_n}$ est convergente, de limite $\frac{1}{\ell}$.

Proposition 1.2.2. Soit (u_n) une suite bornée. On a :

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = 0$$

Exemple 1.2.1. Soit $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Étudier la convergence de la suite $(u_n \times v_n)$.

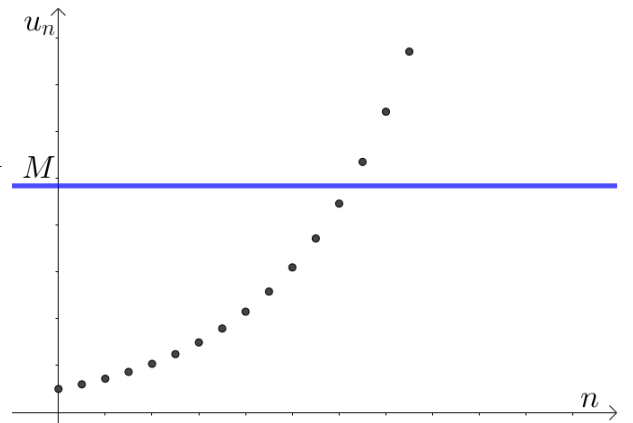
1.3 Le cas des limites infinies

Définition 1.3.1.

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, u_n > M$$

La limite est $-\infty$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$.



Proposition 1.3.1. Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \pm\infty$. On a :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \pm\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

Exemple 1.3.1. Déterminer, si elles existent, les limites des suites suivantes :

1. $\cos(n) + n^2 + 1$

2. $\frac{\cos(n)}{n^2 + 1}$

Proposition 1.3.2 (Formes indéterminées). Il existe quatre types de limites pour lesquelles on ne peut pas conclure directement :

$0 \times \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty - \infty$
-------------------	---------------	-------------------------	-------------------

Exemple 1.3.2. Déterminer les limites des suites $u_n = \frac{n}{2n^2 + 4}$ et $v_n = \frac{n^2 + 3}{3n}$.

1.4 Composition avec une fonction

Notation 1.4.1. $\overline{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Théorème 1.4.1 (Composition). Soient a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = b$.

Exemple 1.4.1. Donner la limite de la suite $v_n = f(u_n)$ où $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n+2} + 2$ et $f(x) = x + 3$.

2 Convergences usuelles

Théorème 2.0.1. On a les résultats suivants :

1. Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
2. Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$
4. Si $\alpha > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$

Théorème 2.0.2 (Croissances comparées). On a les résultats suivants :

1. Soit $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

2. Soit $\alpha > 0$ et $q > 1$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$$

3. Soit $q > 1$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$$

Exemple 2.0.1. Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{(n+1)^2}$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{0.5^n}$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8^n}{n!}$

3 Convergence et inégalités

Théorème 3.0.1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n.$$

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$. Alors :

$$\ell \leq \ell'.$$

Remarque 3.0.1. Attention, lors du passage à la limite, les inégalités strictes deviennent des inégalités larges.

Exemple 3.0.1. Soit $u_n = \frac{2n+1}{2n+4}$ et $v_n = \frac{2n+2}{2n+4}$.

1. Comparer les suites.

2. Déterminer les limites de ces suites.

3. Comparer ces limites.

Théorème 3.0.2 (Encadrement). Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n et que les suites (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ , alors la suite (v_n) est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

Exemple 3.0.2. Étudier la convergence de la suite $u_n = \frac{\cos(n)}{n+1}$.

Théorème 3.0.3 (Comparaison). Soient (u_n) et (v_n) deux suites avec $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

4 Convergence des suites monotones

Théorème 4.0.1 (Théorème de la limite monotone).

- Soit (u_n) est une suite croissante :
 - si (u_n) est majorée, alors elle converge,
 - si (u_n) n'est pas majorée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Soit (u_n) est une suite décroissante :
 - si (u_n) est minorée, alors elle converge,
 - si (u_n) n'est pas minorée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 4.0.1. Étudier la convergence de la suite $u_n = \frac{3n^2}{n^2 + 1}$.

Exemple 4.0.2. Étudier la convergence de la suite $u_n = \frac{1}{n+1}$.

5 Suites adjacentes

Définition 5.0.1. On dit que les deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si et seulement si :

1. la suite (u_n) est croissante
2. la suite (v_n) est décroissante
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Exemple 5.0.1. Montrer que les suites $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ sont adjacentes.

Théorème 5.0.1. Si deux suites sont adjacentes, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

De plus, les deux suites convergent et ont même limite.

Exemple 5.0.2. Dédurre de l'exemple précédent que la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ est convergente.

Méthode 5.1. Pour montrer qu'une suite (u_n) converge, on étudie parfois une suite intermédiaire (v_n) , adjacente à (u_n) . La suite (u_n) est alors convergente, et sa limite est la même que celle de (v_n) .

6 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Proposition 6.0.1. Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et (u_n) une suite telle que

$$\forall n, u_n \in I \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in I$$

alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

Théorème 6.0.2. Soit (u_n) une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue.

Alors si (u_n) converge, sa limite vérifie $f(\ell) = \ell$.

On dit que ℓ est un **point fixe** de f .

6.1 Lorsque l'on connaît la valeur du point fixe.

Méthode 6.1. Soit (u_n) une suite définie par une relation de récurrence du type

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

avec f continue.

1. Recherche des points fixes : On résout l'équation $x = f(x)$ pour connaître les limites éventuelles de la suite.
2. On étudie les variations de la fonction f .
3. On étudie le signe de la fonction $g(x) = f(x) - x$ ($g \leq 0$ indique une suite décroissante et $g \geq 0$ indique une suite croissante).
4. On met toutes ces informations ensemble pour conclure, en tenant compte de la valeur de u_0 .

Exemple 6.1.1. Étudier les limites éventuelles des suites (u_n) et (v_n) en fonction des valeurs initiales.

1. $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

2. $v_{n+1} = v_n^2 - v_n + 2$

6.2 Lorsque l'on ne connaît pas la valeur du point fixe.

Méthode 6.2. Soit (u_n) une suite définie par une relation de récurrence du type

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

avec f continue et dérivable.

1. On montre que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution par le théorème de la bijection appliqué à la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.
2. On montre que cette solution appartient à un intervalle $I =]a, b[$.
3. On montre que $f(I) \subset I$ (Cela permettra de montrer que $u_n \in I$, pour tout n)
4. On majore $|f'(x)|$ sur I par un nombre plus petit M que 1. (Cela permettra d'appliquer le théorème des accroissements finis)
5. On montre, par récurrence que pour tout n , $u_n \in I$
6. A l'aide de l'IAF, on majore $|u_{n+1} - \alpha|$ par $M|u_n - \alpha|$
7. Par récurrence, on majore $|u_n - \alpha|$ par $M^n|u_0 - \alpha|$.
8. On conclut

Exemple 6.2.1. On considère la fonction $f(x) = 4 - \frac{1}{4} \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution α , et que α est dans l'intervalle $I =]3, 4[$.

2. Montrer que $f(I) \subset I$.

3. Montrer que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

4. Soit x_n la suite définie par récurrence par $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $x_n \in I, \forall n \in \mathbb{N}$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$.

6. En déduire que (x_n) converge.

Méthode 6.3.

Pour déterminer une approximation de la limite α d'une suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, il suffit de déterminer à partir de quel rang n le terme x_n est suffisamment proche de la limite. Pour ce faire, on utilise d'inégalité des accroissements finis pour majorer

$$|x_{n+1} - \alpha| = |f(x_n) - f(\alpha)| \leq M |x_n - \alpha|,$$

puis par récurrence

$$|x_n - \alpha| \leq M^n |x_0 - \alpha|.$$

Exemple 6.2.2. Trouver une approximation de α à 10^{-5} près.