Couples de variables aléatoires discrètes

ECG2 - mathématiques approfondies

Rappel de méthode

Lois marginales et conditionnelles. Préciser les supports et sommer sur les valeurs de l'autre variable :

$$\mathbb{P}(X=x)=\sum_y \mathbb{P}(X=x,Y=y)=\sum_y \mathbb{P}(Y=y)\mathbb{P}(X=x\mid Y=y).$$

Dans la seconde somme, retenir les y tels que $\mathbb{P}(Y=y)>0$. Pour une loi conditionnelle :

$$\mathbb{P}(X=x\mid Y=y)=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}.$$

Indépendance. Vérifier, pour tous les couples de valeurs possibles, $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$.
Maximum et minimum. Si X et Y sont indépendantes, poser $M=\max(X,Y)$ et $N=\min(X,Y)$, puis utiliser

$$\mathbb{P}(M\leq k)=\mathbb{P}(X\leq k)\mathbb{P}(Y\leq k),\qquad \mathbb{P}(N>k)=\mathbb{P}(X>k)\mathbb{P}(Y>k).$$

Pour une variable à valeurs entières :

$$\mathbb{P}(M=k)=\mathbb{P}(M\leq k)-\mathbb{P}(M\leq k-1),$$
$$\mathbb{P}(N=k)=\mathbb{P}(N>k-1)-\mathbb{P}(N>k).$$

Somme de variables indépendantes. Pour $S=X+Y$, décomposer selon les valeurs de X :

$$\mathbb{P}(S=s)=\sum_x \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=s-x).$$

1. Exercices d'application

Exercice 1 — Une loi de couple

La loi conjointe de (X,Y) est donnée par :

$X\backslash Y$	0	1	2
0	1/12	2/12	1/12
1	2/12	1/12	5/12

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X=1]$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$ et $\mathbb{P}(X<Y)$.

Exercice 2 — Des lois conditionnelles à une loi marginale

Une urne contient trois boules numérotées 1, 2, 3. On tire une boule au hasard et on note X son numéro. Si le numéro obtenu est k, on choisit au hasard un entier parmi $0,1,\dots,k$, noté Y.

1. Donner la loi de X et la loi conditionnelle de Y sachant $[X=k]$, pour $k\in\{1,2,3\}$.
2. Déterminer la loi du couple (X,Y).
3. En déduire la loi de Y.
4. Calculer $\mathbb{P}(X=3\mid Y=1)$.

Exercice 3 — Minimum et maximum de deux dés

On lance indépendamment deux dés équilibrés à six faces. On note X,Y les résultats, puis $M=\max(X,Y)$ et $N=\min(X,Y)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(M\leq k)$ pour $k\in\{1,\dots,6\}$.
2. En déduire la loi de M.
3. Calculer $\mathbb{P}(N\geq k)$ pour $k\in\{1,\dots,6\}$, puis déterminer la loi de N.
4. M et N sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 — Deux temps d'attente

Les variables X,Y sont indépendantes et suivent les lois géométriques de paramètres respectifs $p,q\in]0,1[$ sur $\mathbb{N}^*$. Ainsi $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ pour $k\geq 1$. On pose $N=\min(X,Y)$ et $M=\max(X,Y)$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X>k)$ et $\mathbb{P}(Y>k)$ pour $k\in\mathbb{N}$.
2. Déterminer la loi de N et reconnaître une loi usuelle.
3. Déterminer $\mathbb{P}(M\leq k)$ pour $k\in\mathbb{N}$.
4. En déduire la loi de M.
5. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.

Exercice 5 **Somme de deux lois binomiales**

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et X, Y indépendantes, de lois $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$. On pose $S = X + Y$.

1. Déterminer le support de S.
2. Exprimer $\mathbb{P}(S = k)$ sous la forme d'une somme.
3. À l'aide de l'identité suivante, déterminer la loi de S :

$$\sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(n,k)} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

4. Retrouver ce résultat en interprétant X, Y comme des nombres de succès dans des épreuves de Bernoulli.

Exercice 6 **Somme de deux lois géométriques**

Soient X, Y indépendantes, de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ sur $\mathbb{N}^*$. On pose $S = X + Y$.

1. Déterminer le support de S.
2. Pour $n \geq 2$, décomposer $[S = n]$ à l'aide des événements $[X = k, Y = n - k]$.
3. En déduire que, pour $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(S = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$

4. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[S = n]$ et reconnaître une loi usuelle.

Exercice 7 **Somme de deux lois de Poisson**

Soient X, Y indépendantes, de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On pose $S = X+Y$.

1. Exprimer $\mathbb{P}(S = n)$ sous la forme d'une somme, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. À l'aide de la formule du binôme, déterminer la loi de S.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = k \mid S = n)$ pour $0 \leq k \leq n$.
4. Reconnaître cette loi conditionnelle.

2. Problèmes de concours

Problème 1 **d'après EDHEC 2023 – Mathématiques approfondies, exercice 3**

On lance une pièce, indépendamment à chaque lancer. La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$; on pose $q = 1 - p$. La variable X compte les faces obtenues avant le premier pile. On définit Q, R par

$$X = 3Q + R, \qquad Q \in \mathbb{N}, \quad R \in \{0,1,2\}.$$

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, décrire $[Q = k]$ à l'aide de X. Déterminer la loi de Q et reconnaître une loi géométrique décalée.
3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(R = 0)$, $\mathbb{P}(R = 1)$ et $\mathbb{P}(R = 2)$.
4. Déterminer la loi conjointe de (Q, R) et établir l'indépendance de Q et R.
5. On dispose de `rd.geometric(p)`, qui simule une loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$. Écrire une fonction Python renvoyant une simulation du triplet (X, Q, R).

Problème 2 **d'après EDHEC 2005 – ECS, problème, partie 1**

On choisit équiprobablement l'un de deux jetons. Le premier porte les numéros 0 et 1 ; le second porte 1 sur ses deux faces. On lance ensuite le jeton choisi, les lancers étant indépendants conditionnellement à ce choix. On note E l'événement « le premier jeton a été choisi ».

X désigne le rang du premier 0, et Y celui du premier 1 ; un rang vaut 0 si le numéro considéré n'apparaît jamais.

1. Calculer la probabilité d'obtenir n fois 1 lors des n premiers lancers. Sachant ces résultats, calculer la probabilité de E et sa limite.
2. Déterminer la loi de X, puis $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Faire de même pour Y.
4. Déterminer la loi de $S = \max(X, Y)$; reconnaître une loi usuelle et donner son espérance et sa variance.
5. Déterminer la loi de $I = \min(X, Y)$, son espérance et sa variance.