Chapitre 6
Intégrales généralisées

1 Rappels d'intégration sur un segment

1.1 Définitions

Définition 1.1.1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Proposition 1.1.1.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- f admet une primitive sur I
- Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ F(x) = G(x) + c.$$

Définition 1.1.2.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a \leq b$. Si F est une primitive de f, on pose :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette quantité est indépendante de la primitive de f choisie. On l'appelle **l'intégrale de f sur le segment** $[a, b]$.

Théorème 1.1.2 (Théorème fondamental de l'analyse)**.**
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit $a \in I$. Alors l'application

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et c'est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

1.2 Propriétés élémentaires

NOM	HYPOTHÈSES	CONCLUSION
Relation de Chasles	f est continue sur I, $a, b, c \in I$	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$
Linéarité	f, g continues sur $[a, b]$	$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
Positivité	• $a \leq b$ • f continue sur $[a, b]$ • $\forall t \in [a, b]$, $f(t) \geq 0$	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
Croissance	• $a \leq b$ • f, g continues sur $[a, b]$ • $\forall t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
Cas de nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive	• $a < b$ • f est **continue** sur $[a, b]$ • $\forall t \in [a, b]$, $f(t) \geq 0$ • $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$	$\forall t \in [a, b], \quad f(t) = 0$
	• $a < b$ • f est **continue** sur $[a, b]$ • $\forall t \in [a, b]$, $f(t) \geq 0$ • Il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $f(t_0) > 0$	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$

Remarque 1.2.1.
Attention : pour le cas de nullité d'une intégrale, on prendra bien soin de citer toutes les hypothèses :

- continuité de f sur $[a, b]$;
- positivité de f sur $[a, b]$.

1.3 Sommes de Riemann

Théorème 1.3.1 (Somme de Riemann - Méthode des rectangles)**.**
Si f et continue sur $[a, b]$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt \qquad \text{(rectangles à gauche).}$$

On a également :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt \qquad \text{(rectangles à droite).}$$

Remarque 1.3.1.
En pratique, on a généralement $a = 0$ et $b = 1$ soit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Méthode 1.1.
On pourra penser à une somme de Riemann lorsque la suite (u_n) considérée est une somme finie de n termes et que le terme général de cette somme dépend lui aussi de n.
On mettra alors $\dfrac{1}{n}$ en facteur de la somme, et il s'agira d'identifier une fonction f telle que $u_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

Exemple 1.3.1.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k+n}$.

1.4 Primitives usuelles

Proposition 1.4.1 (Primitives usuelles).

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$1+\tan^2(x)$	$\tan(x)$

$f(x)$	$F(x)$
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
$u'e^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(x)$	$-\cos(u)$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$\dfrac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$
$u'(1+\tan^2(u))$	$\tan(u)$

2 Rappels sur les intégrales généralisées

2.1 Définition

Définition 2.1.1.

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si $\lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe, on dit que l'**intégrale généralisée** (ou **impropre**) $\int_a^b f(t)dt$ **converge**, et on note :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée et **divergente**.
La **nature d'une intégrale généralisée** est son caractère convergent ou divergent.

Exemple 2.1.1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

- $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$

- $\int_0^{+\infty} \sin(t)dt.$

Définition 2.1.2.

- On définit, de même que précédemment, l'intégrale sur un intervalle de la forme $]a, b]$ où $a \in \mathbb{R} \sup\{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ comme la limite (si elle existe) $\lim\limits_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$.
- Si f est continue sur un intervalle $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dit **convergente** si pour un (et donc pour tous) $c \in]a, b[$, les deux intégrales

  $$\int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt$$

  convergent. On pose alors :

  $$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Remarque 2.1.1.
En pratique, on choisit un réel $c \in]a, b[$ qui nous arrange.

Exemple 2.1.2.
Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

Proposition 2.1.1.
Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ avec b réel.
Si $\lim\limits_{t \to b^-} f(t)$ existe et est finie, alors f est prolongeable par continuité en b et l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge.
On dit alors que l'intégrale est **faussement impropre** (ou **faussement généralisée**).

Remarque 2.1.2.
Attention, c'est faux si b n'est pas un réel : par exemple, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$ mais $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge.

Exemple 2.1.3.
Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Plus généralement, nous pouvons être amené à considérer des fonctions qui ne sont pas continues sur un intervalle, mais sur un intervalle privé d'un nombre fini de points.

Proposition 2.1.2.
Considérons $-\infty \leq a = a_1 < a_2 < ... < a_p = b \leq +\infty$, et soit f une fonction continue sur chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$, $1 \leq i \leq p-1$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si chacune des intégrales $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$ converge pour $1 \leq i \leq p-1$. On note alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a_1}^{a_2} f(t)dt + ... + \int_{a_{p-1}}^{a_p} f(t)dt.$$

Méthode 2.1 (Etude de la nature d'une intégrale généralisée.)**.**

Pour étudier la nature d'une intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$, on procèdera comme suit :

(i) on détermine précisément les points de discontinuité de f où il faudra étudier la convergence de l'intégrale ;

(ii) on étudie l'intégrabilité de f sur tous les sous-intervalles de $[a, b]$ contenant au plus un point où l'intégrale est impropre ;

(iii) l'intégrale de départ converge si Toutes ces ces intégrales convergent. En cas de convergence, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est égale à la somme des intégrales sur tous ces sous-intervalles.

Exemple 2.1.4.

Déterminer la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ avec $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

2.2 Propriétés élémentaires

NOM	HYPOTHÈSES	CONCLUSION
Relation de Chasles	Toutes les intégrales en jeu convergent	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ $\left(c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\right)$
Linéarité	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent	$\int_a^b \left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right)\mathrm{d}t$ converge $\quad (\lambda, \mu$ réels$)$ $\int_a^b \left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge	$\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t$ diverge
Positivité	• $a \leq b$ • $\forall t \in [a, b[,\ f(t) \geq 0$ • $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
Croissance	• $a \leq b$ • $\forall t \in [a, b[,\ f(t) \leq g(t)$ • $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
Cas de nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive	• $a < b$ • f est **continue** sur $[a, b[$ • $\forall t \in [a, b[,\ f(t) \geq 0$ • $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$	$\forall t \in [a, b[,\ f(t) = 0$
	• $a < b$ • f est **continue** sur $[a, b[$ • $\forall t \in [a, b[,\ f(t) \geq 0$ • Il existe $t_0 \in [a, b[$ tel que $f(t_0) > 0$ • $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$

Remarque 2.2.1.

Attention : l'intégrale généralisée $\int_a^b (f+g)(t)dt$ peut converger alors que $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ divergente.

On ne peut donc pas scinder une intégrale généralisée en deux sans vérifier au préalable que ces deux intégrales convergent.

2.3 Intégrales de référence

	Intégrale	Nature	Valeur
Riemann	En $+\infty$: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$	Converge ssi $\alpha > 1$	À retrouver si besoin à l'aide d'une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$: $\begin{cases} t \mapsto \ln t \text{ si } \alpha = 1 \\ t \mapsto \frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$
Riemann	En $a \in \mathbb{R}$ ($b \in \mathbb{R}, b > a$) : $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ Cas particulier $a = 0$: $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$	Converge ssi $\alpha < 1$	
Expon.	$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	Converge ssi $\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$
Log.	$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$	Converge	À retrouver si besoin à l'aide d'une primitive de $t \mapsto \ln(t)$: $t \mapsto t\ln(t) - t$
Gauss	$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$	Converge	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
Gauss	$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$	Converge	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
Gamma	$\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \quad (\nu \in \mathbb{R})$	Converge ssi $\nu > 0$	$\Gamma(\nu)$ par définition

Exemple 2.3.1.

- $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ sont toutes deux divergentes.
- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}$ est convergente (intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$).
- $\int_2^3 \frac{dt}{\sqrt{t-2}}$ est convergente (intégrale de Riemann en 2 avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

2.4 Critères de comparaison

Comparaison par	Hypothèses	Conclusion
Inégalité	• Au voisinage de b, $0 \leq f(t) \leq g(t)$ • $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge
	• Au voisinage de b, $0 \leq f(t) \leq g(t)$ • $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge	$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge
Négligeabilité	• $f(t) = \underset{b}{o}(g(t))$ • Au voisinage de b, $g(t) \geq 0$ • $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (absolument)
	• $f(t) = \underset{b}{o}(g(t))$ • Au voisinage de b, $g(t) \geq 0$ • $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge	$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge
Équivalent	• $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$ • Au voisinage de b, $g(t) \geq 0$ (ou $f(t) \geq 0$) • $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge (respectivement diverge)	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (resp. diverge)

Remarque 2.4.1.

- Le réel a n'a ici aucune importance, il faut juste le choisir dans l'intervalle où f et g sont toutes les deux continues.
- Les critères de comparaison s'appliquent plus généralement avec des fonctions de signe constant au voisinage de b (on les applique à $-f$ si f est négative). Pour des fonction qui changent constamment de signe au voisinage de b ou dont le signe est difficile à déterminer, on pense à étudier la convergence absolue.

Exemple 2.4.1.
Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$.

- Intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

2.5 Intégrales absolument convergentes

Définition 2.5.1.

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ **converge absolument** lorsque l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Théorème 2.5.1.
Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument, alors elle converge. De plus :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \qquad \text{(Inégalité triangulaire)}$$

Exemple 2.5.1.
Etudier la nature des intégrales suivantes :

- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t\sqrt{t}}dt.$

- $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt.$

3 Techniques de calcul d'intégrales généralisées

3.1 Intégration par parties

Proposition 3.1.1 (Intégration par parties)**.**
Soient f et g deux fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Exemple 3.1.1.

- Déterminer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$

- Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (t^2 - t + 1)\cos t dt$.

Remarque 3.1.1.
ATTENTION : On n'effectuera JAMAIS d'intégration par parties directement sur une intégrale généralisée.

Méthode 3.1 (Intégration par parties pour une intégrale généralisée.)**.**
Pour faire une intégration par partie sur une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ généralisée en b :

(i) on commence par faire cette intégration par parties sur un segmnent $[a, x]$ avec $x \in [a, b[$;

(ii) on fait ensuite tendre x vers b en justifiant bien le calcul.

Exemple 3.1.2.
Nature et valeur éventuelle de $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)dt$.

3.2 Changement de variable

Théorème 3.2.1 (Changement de variable pour les intégrales généralisées)**.**
Soit f une fonction continue sur $]\alpha, \beta[$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. On considère une fonction $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$. Si :

- φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$,
- φ est strictement croissante sur $]a, b[$,
- $\varphi(]a, b[) =]\alpha, \beta[$.

Alors les intégrales généralisées $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature, et en cas de convergence sont égales.

Remarque 3.2.1.

- Si φ est strictement décroissante alors ce sont $\int_\beta^\alpha f(x)dx$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ qui sont de même nature, et en cas de convergence sont égales.
- Les hypothèses sont plus contraignantes que pour un changement de variable sur un segment : en plus d'être $\mathcal{C}^1$, le changement de variable doit être strictement monotone pour être licite.
- Les changements de variables affines (c'est-à-dire de la forme $\varphi(t) = mt + p, m \neq 0$) sont donc forcément licites, rien ne sera à vérifier dans ce cas.
- Tout changement de variable non affine sera précisé dans l'énoncé. Il s'agira alors de bien vérifier que le changement est licite, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone.

Méthode 3.2. Pour effectuer un changement de variables dans une intégrale généralisées $\int_a^b f(u)du$:

1. On pose le changement de variable $u = \varphi(t)$
2. On vérifie que le changement de variable est licite (c'est-à-dire que φ et $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone)
3. On cherche les bornes α et β telles que φ soit une bijection de $]\alpha, \beta[$ vers $]a, b[$.
4. On change les bornes et remplace u par $\varphi(t)$ et du par $\varphi'(t)dt$.

Méthode 3.3. Pour effectuer un changement de variables dans une intégrale généralisées $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$:

1. On vérifie que φ est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone.
2. On pose $u = \varphi(t)$.
3. On calcule $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$
4. On calcule $\int_a^b f(u)du$

Exemple 3.2.1.
Déterminer la nature et la valeur éventuelle des intégrales suivantes :

- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ (en posant $t = \sqrt{x}$).

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (en posant $x = \cos(t)$).

Proposition 3.2.2.
Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et f une fonction continue sur $]-a; a[$.

- Si f est paire.
  Les intégrales généralisées $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)dt$ sont de même nature, et satisfont en cas de convergence : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$.
- Si f est impaire.
  Les intégrales généralisées $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)dt$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

Exemple 3.2.2.
L'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

4 Techniques d'étude de fonctions et de suites définies par une intégrales

Ces différentes techniques ne sont pas à connaître par coeur, elles seront guidées en exercice.

4.1 Etude d'une suite d'intégrales

Méthode 4.1. Lorsque l'on étudie une suite définie par des intégrales impropres : $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $I_n = \displaystyle\int_a^b f_n(t)dt$ avec une borne impropre

1. Lorsque l'on veut justifier que la suite est bien définie : on justifie que I_n est bien définie pour tout n, c'est-à-dire que toutes les intégrales sont convergentes (critère d'équivalence, négligeabilité, comparaison)
2. Lorsque l'on veut minorer/majorer I_n, on cherche à minorer/majorer f_n sur l'intervalle $[a, b]$
3. Lorsque l'on veut regarder si (I_n) est croissante ou décroissante on part de $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_a^b f_{n+1}(t) - f_n(t)dt$ et l'on regarde le signe de la fonction intérieure sur $[a, b]$
4. Lorsque l'on regarde si la suite (I_n) converge on utilise le théorème de convergence monotone avec les deux points précédents. **Attention** ne pas confondre convergence de l'intégrale I_n à n fixé (point 1) et convergence de la suite de nombre (I_n).
5. Lorsque l'on veut une relation entre I_n et I_{n+1} on part généralement de I_{n+1} et on applique une IPP pour essayer de retomber sur I_n
6. Une fois tout cela fait on "sort" de l'étude d'intégrale et on arrive sur une étude de suite reposant sur une relation de récurrence.

4.2 Etude de fonctions définies par une intégrale

Méthode 4.2. Lorsque l'on une fonction définie par $g : x \mapsto \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$.

1. On détermine pour quels x l'intégrale est bien définie sans problèmes c'est-à-dire quand est-ce que f est continue sur $[\varphi(x), \psi(x)]$.
2. S'il y a des cas limites : f continue sur $]\varphi(x), \psi(x)]$ par exemple, on peut étudier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$.
3. Pour justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$. On écrit l'intégrale à l'aide d'une primitive de f : on pose F une primitive de f, alors

$$g(x) = [F(t)]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$$

   Or par définition F est de classe $\mathcal{C}^1$ (car dérivable et de dérivée f. Et si φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions.
4. On peut alors calculer $g'(x) = \psi'(x)F'(x) - \varphi'(x)F'(x) = \psi'(x)f(x) - \varphi'(x)f(x)$. Et donc étudier les variations de g.

Méthode 4.3. Lorsque l'on étudie une fonction définie par $g : x \mapsto \int_a^b f_x(t)dt$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

1. Pour montrer que g est définie sur un intervalle I, on justifie que pour tout $x \in I$, $\int_a^b f_x(t)dt$ converge.
2. Si l'on veut étudier les variations de g, on étudie pour $x < y$, $g(y) - g(x) = \int_a^b f_x(t) - f_y(t)dt$.
3. Si l'on veut majorer/minorer $g(x)$, on majore/minore $t \mapsto f_x(t)$ sur $[a, b]$ puis on intègre la fonction minorante/majorante.
4. Si l'on veut calculer une limite, on essaie de majorer ou minorer ou les deux la fonction g pour utiliser un théorème d'encadrement.

5 La fonction gamma Γ

Proposition 5.0.1.
L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Démonstration.

□

Définition 5.0.1.

On appelle **fonction Gamma d'Euler**, et on note Γ, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Proposition 5.0.2.

1. $\forall x \in]0, +\infty[, \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \ \Gamma(n+1) = n!$.
3. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Démonstration.

□