
TD 6 - Intégrales généralisées

Exercice 1. (*)
Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

$$\int_1^{+\infty} e^{-\pi t}dt \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+2t)\sqrt{t}} \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+(t\ln(t)^2}dt \ ; \ \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1+\sin(x^2)}{x^2}dx \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^t}dt \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}}dt \ ; \ \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{t}}{\sin(2t)-\sin(t)}dt$$

Exercice 2.
Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes, et en cas de convergence, calculer leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt \ ; \ \int_0^{1/2} \frac{1}{t(\ln(t))^2}dt \ ; \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(t)^2}{1+t^2}dt \ ; \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}dt \ ; \ \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t}dt.$$

Exercice 3.
Montrer que les intégrales généralisées suivantes convergent et déterminer leur valeur à l'aide d'une intégration par parties.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3}e^{-1/t}dt \ ; \ \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Exercice 4 (Exemple d'intégrale généralisée semi-convergente)**.** (*)

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|dt$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|dt = 2$.
   (c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_\pi^{n\pi} \frac{|sint|}{t}dt = +\infty$.
   (d) En déduire que l'intégrale généralisée $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt$ diverge.

Ainsi, l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge mais ne converge pas absolument. Elle est dite **semi-convergente**.

Exercice 5.
Déterminer la nature des intégrales suivantes et préciser leur valeur en cas de convergence en utilisant les changements de variable indiqués entre parenthèses.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx \text{ (poser } t=\ln x) \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1}dt \text{ (poser } u=e^t)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{u(1-\ln u)^2}du \text{ (poser } u=e^x) \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}dx \text{ (poser } u=\sqrt{x})$$

Exercice 6. (*)

1. (a) A l'aide du changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ convergent et sont de valeurs opposées.

   (b) Que peut-on en déduire sur l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$?

2. Soit $a > 0$. A l'aide d'un changement de variable, prouver la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}dx$.

Exercice 7.
Déterminer les limites suivantes : $\lim n \to +\infty \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (e^{k+n})^{\frac{1}{n}}$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$.

Exercice 8. (*)
Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 9. (*)
Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

On étudiera la parité, les variations, et l'on montrera que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 10 (QSP ESCP 2018)**.** (**)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n}.$$

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 11 (Oral ESCP 2013)**.** (***)
Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{t+\sin(t)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en $x = 0$.
   On note $\tilde{f}$ la fonction ainsi prolongée.
5. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $\tilde{f}'(0)$.
6. La fonction $\tilde{f}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12. (*)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$.

1. Justifier la convergence des intégrales généralisées I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge.
3. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+2} I_n$.

4. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 13. (*)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^{x+2}}}dt$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $]0,+\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0,+\infty[$. En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 14. (*)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(xt)dt$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $f(x)$ converge absolument. Ainsi f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est paire et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \Gamma(1/2)$.
3. (a) Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $|\cos(a) - \cos(b)| \leq |a-b|$.
   (b) En déduire que pour tout $(x,x_0) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \dfrac{\Gamma(1/2)}{2}|x - x_0|$.
   (c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 (Etude d'un reste)**.** (**)

Soit f la fonction définie pour tout $x \in]0,+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie, préciser ses variations et ses limites en $+\infty$ et en 0.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$.
   (b) En déduire que pour tout $x > 0$,
   $$\frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}.$$
   (c) Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt$ est bien définie.
   (b) Montrer que g admet une limite finie lorsque x tend vers 0.
   (c) En déduire que $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$.
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 16 (Théorème de comparaison série/intégrale)**.** (*)
On considère une fonction f continue, décroissante et strictement positive sur $[p, +\infty[$ où $p \in \mathbb{N}$.
On pose pour tout entier $n \geq p$:

$$u_n = \int_p^n f(t)dt \text{ et } v_n = \sum_{k=p}^{n} f(k).$$

1. On montre dans cette partie que (u_n) et (v_n) sont de même nature (Théorème de comparaison série/intégrale).
   (a) Soit $n \geq p+1$. Justifier que pour tout $p \leq k \leq n-1$,
   $$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$
   (b) En déduire que pour tout $n \geq p+1$, $v_n - f(p) \leq u_n \leq v_{n-1}$.
   (c) Conclue que les suites (u_n) et (v_n) sont de même nature.
2. Application : Etude de la série de Bertrand $S = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$.
   (a) Montrer que si $\beta \leq 0$, alors la série S diverge.
   (b) On suppose $\beta > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^\beta}$ est convergente si, et seulement si, $\beta > 1$.
   Indication : on effectuera le changement de variable $u = \ln(t)$.
   (c) Conclure que S converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

Exercice 17 (Valeur de Γ aux demi-entiers)**.**

1. Justifier la convergence et déterminer la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}dt$ et $\int_0^{+\infty} t^{5/2}e^{-t}dt$
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Exercice 18. (*)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer I_0 et I_1.
3. A l'aide du changement de variable $y = x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n$.
5. Exprimer I_{2n+1} et I_{2n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x^2}dx$ converge et déterminer sa valeur en fonction des coefficients de P.