
TD 10 - Suites numériques

Exercice 1.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites minorées. Peut-on dire que $(u_n v_n)$ est minorée ?

Exercice 2.

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- | | | |
|-------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| 1. $u_n = \frac{\ln(n)^2}{n}$ | 3. $u_n = \frac{\ln(n)^4}{n^2}$ | 5. $u_n = \frac{0.5^n}{n!}$ |
| 2. $u_n = \frac{2^n}{n^3}$ | 4. $u_n = \frac{3^n}{n!}$ | |

Exercice 3.

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $\forall n \geq 2, u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3 - 2n + 1}}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ où $0 \leq a < b$
3. $\forall n \geq 1, u_n = \frac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2 + 1}}$

Exercice 4.

On étudie la suite définie par $u_0 > 7/4$, $u_{n+1} = 5/2 + \sqrt{u_n - 7/4}$.

1. Montrer que $u_n \geq \frac{5}{2}$, pour tout $n \geq 1$.
2. Soit f la fonction telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. et $g : x \mapsto f(x) - x$. Etudier le signe de g sur $\left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$.
3. Déterminer la monotonie de (u_n)
4. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 5.

On veut étudier la suite définie par $u_{n+1} = \frac{2u_n}{3 + u_n}$. On pose $f(x) = \frac{2x}{3 + x}$ et $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer le signe de g .
 2. Déterminer les variations de f . On fera apparaître les valeurs particulières de g
 3. En déduire suivant la valeur de u_0 les variations de (u_n) .
 4. Etudier la convergence de (u_n) selon la valeur de u_0 .
- 1.

Exercice 6.

Étudier la suite définie par $u_{n+1} = \pi/2 - \cos u_n$.

Exercice 7.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2} \end{cases}$$

Étudier le sens de variation de la suite et en déduire qu'elle converge.
Quelle est sa limite ?

Exercice 8.

1. Étudier la suite définie par $u_0 > 0, u_{n+1} = u_n + 1/u_n$.
2. Déterminer la limite de $u_{n+1}^2 - u_n^2$.

Exercice 9.

Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$$

Exercice 10.

Étudier la suite définie par $u_0 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

Exercice 11.

Soit $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + 1/k^2)$ et $v_n = (1 + 1/n)u_n$.

Montrer que ces suites sont adjacentes.

Exercice 12.

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \text{ et } v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

1. Démontrer que $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.
2. Démontrer que les deux suites sont adjacentes.

Exercice 13.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que la suite est minorée par 0.
2. Étudier son sens de variation et en déduire qu'elle converge.
3. Quelle est sa limite ?

Exercice 14.

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 2, u_1 = 3, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} \sqrt{u_n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.
2. On pose $v_n = \ln(u_n)$. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n .

Exercice 15.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer que (u_n) converge vers 1.

Exercice 16.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{2p-1}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{n}{2n+1}$

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 17.

Justifier que les suites u et v définies par les relations suivantes sont adjacentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

Exercice 18.

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 &= 6 \\ v_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{6}(u_n + 5v_n) \end{cases}$$

1. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n).$$

Montrer que (a_n) est une suite géométrique. Donner son expression en fonction de n et sa limite.

2. Démontrer que (u_n) est décroissante et (v_n) croissante. Que peut-on en déduire ?
3. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n).$$

Montrer que (b_n) est constante. En déduire la limite de (u_n) et (v_n) .

Exercice 19.

Soient a et b deux réels positifs tels que $a \leq b$. Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par

$$\begin{cases} a_0 &= a \\ b_0 &= b \\ a_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les réels a_n et b_n sont bien définis et vérifient $0 \leq a_n \leq b_n$.
2. Démontrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Exercice 20.

On pose $f(x) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x$.

1. Vérifier que $\pi/6$ est la seule solution de $f(x) = x$.
2. On définit la suite $(u_n)_n$ par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que :

$$\left| u_{n+1} - \frac{\pi}{6} \right| \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \left| u_n - \frac{\pi}{6} \right|.$$

3. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 21.

On considère la fonction $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que pour tout entier positif n , l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n .
3. Comparer x_n et x_{n+1} . En déduire la monotonie de la suite x_n .
4. Démontrer que $\ln(n - \ln n) \leq x_n \leq \ln n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\ln(n)}$.

Exercice 22 (Moyennes de Cesaro).

Soit u une suite réelle. Pour tout entier strictement positif n , on pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$$

1. On suppose que la suite u est croissante et convergente vers une limite finie.
 - (a) Justifier la croissance de la suite v puis la convergence vers une limite finie.
 - (b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq v_n \text{ et } v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$$

- (c) En déduire que u et v convergent vers une limite commune.
 - (d) Réciproquement si u est croissante et v est convergente, montrer que u converge.
2. *Application.*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $(a_{n+1} - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \geq 0$$

Montrer que $(a_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 23.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_n^2 + u_{n+1}^2}{u_n + u_{n+1}}$$

1. Montrer que tous les termes u_n sont bien définis, minorés par 1 et majorés par 2.
2. Ecrire une fonction `Python` qui prenne en argument n et qui renvoie u_n .
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le signe de $u_{n+2} - u_{n+1}$ en fonction de celui de $u_{n+1} - u_n$.
 (b) En déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de la parité de n
4. On veut montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
 Pour tout entier positif n , on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
 (a) Montrer que les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et convergentes vers une même limite.
 (b) Conclure.