

Chapitre 11

Intégration sur un segment

1 Primitives

Définition 1.0.1. La fonction F est une primitive de la fonction f si F est dérivable et si

$$F' = f.$$

Exemple 1.0.1. Démontrer que $F(x) = e^{2x}$ est une primitive de $f(x) = 2 e^{2x}$ définie sur $[1, 3]$.

Théorème 1.0.1. Si f admet une primitive F sur un intervalle I , alors elle en admet une infinité.

Ses primitives diffèrent les unes des autres par une constante.

Exemple 1.0.2. Donner l'ensemble des primitives de $f(x) = e^{2x}$.

Théorème 1.0.2. Si f est continue sur I , alors f admet une primitive sur I .

Proposition 1.0.3 (Primitives usuelles).

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n \quad n \geq 0$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$u' u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^n} \quad n > 1$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\frac{u'}{u^n} \quad n > 1$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
e^x	e^x	$u' e^u$	e^u
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$

2 Intégrale d'une fonction

Définition 2.0.1. Soit f continue sur $[a, b]$ de primitive F . On définit :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

Remarque 2.0.1. La définition ne dépend pas de la primitive choisie.

Exemple 2.0.1. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

2.1 Techniques usuelles

2.1.1 Intégration par parties

Théorème 2.1.1 (Intégration par parties).

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [a, b]$. Alors

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx.$$

Démonstration.

Méthode 2.1. Pour simplifier les calculs d'intégrales en utilisant une IPP :

- si on a une expression de type $P(x) \times e^x$, $P(x) \times \sin(x)$ ou $P(x) \times \cos(x)$ à intégrer, avec P un polynôme, on dérive le polynôme pour diminuer son degré et se ramener à une expression plus simple.
- si on a une expression de type $\ln(x) \times f(x)$ à intégrer, avec f une fonction quelconque, on dérive le $\ln$.
- si on a une expression du type $f(x)$ à intégrer et qu'on ne connaît pas de primitive de f , on peut la voir comme $1 \times f(x)$, intégrer la fonction 1 et dériver f .

Exemple 2.1.1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-\pi}^{2\pi} x \sin(x) \, dx$

2. $\int_2^4 \ln(x) \, dx$

3. $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$

2.1.2 Changement de variables

Théorème 2.1.2 (Changement de variables).

- Soit f continue sur $[a, b]$ et φ une fonction dérivable et bijective sur un intervalle I , à valeurs dans $[a, b]$ et telle que $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Effectuer le changement de variables $x = \varphi(t)$ dans l'intégrale revient à écrire :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

- Soit f continue sur $[a, b]$ et φ une fonction dérivable et bijective sur l'intervalle $[a, b]$. Effectuer le changement de variables $t = \varphi(x)$ dans l'intégrale revient à écrire :

$$\int_a^b f(\varphi(x)) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) \frac{dt}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$$

Méthode 2.2. Pour effectuer un changement de variables, on se pose deux questions :

1. Que deviennent les bornes de l'intégrale ?
2. Que devient le dx ? Pour ça, on considère t et x comme des fonctions, et on dérive la relation $t = \varphi(x)$, ce qui donne $t' = x' \times \varphi'(x)$. On note $t' = dt$ et $x' = dx$ et on obtient $dt = dx \times \varphi'(x)$.
3. Une fois qu'on a répondu à ces questions, on manipule la fonction dans l'intégrale (on la multiplie par $\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(x)}$) pour faire apparaître le $dt = \varphi'(x)dx$, puis on procède au changement de variables.

Exemple 2.1.2. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ en posant $x = \sin u$

2. $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx$ en posant $u = \sin x$

Théorème 2.1.3. Soit f périodique de période T , on a :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \int_a^b f(t) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt$$

Démonstration.

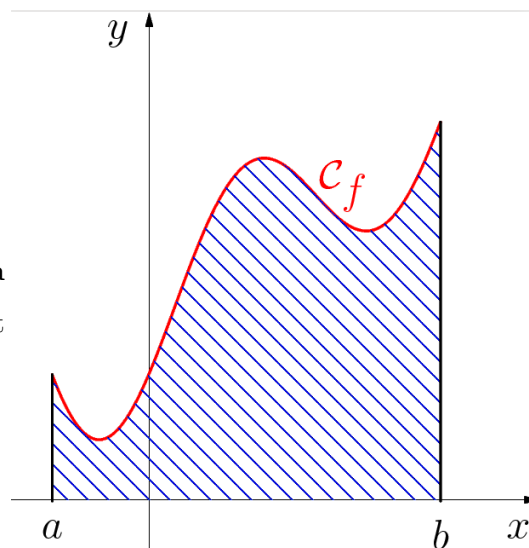
□

3 Propriétés de l'intégrale

Théorème 3.0.1.

Soit f continue et positive sur $[a, b]$.

$\int_a^b f(t) dt$ représente l'aire délimitée par la courbe de f , l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$.



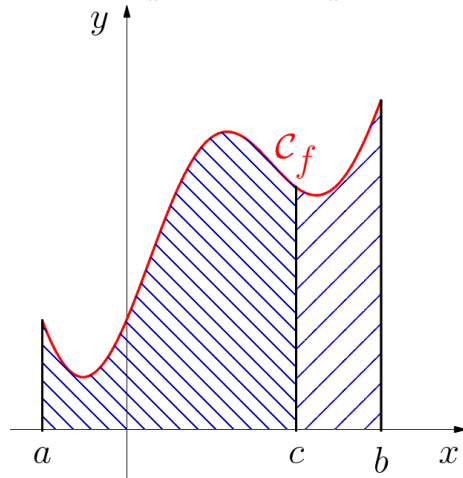
Exemple 3.0.1. Calculer l'aire sous la courbe représentative de $\cos(x)$ entre les droites $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

Remarque 3.0.1. Si f change de signe alors $\int_a^b f(t) dt$ représente l'aire algébrique délimitée par la courbe de f , l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$, c'est-à-dire que lorsque la courbe est au dessus de l'axe des abscisses l'aire est comptée positivement et lorsque la courbe est sous l'axe des abscisses, l'aire est comptée négativement.

Théorème 3.0.2.

Si f est continue sur un intervalle I et soient $a, b, c \in I$, alors on a la **relation de Chasles** :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



Remarque 3.0.2. On a donc $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$

Théorème 3.0.3. Si f est **continue par morceaux** sur $\bigcup_{i=0}^{n-1}]x_i, x_{i+1}[$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$, et si f admet des **limites finies à droites et à gauche en x_i** , on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t) dt$$

Exemple 3.0.2. On considère la fonction affine par morceaux

$$f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \in [-1, 1[\\ 4x + 2 & \text{si } x \in [1, 3] \end{cases}$$

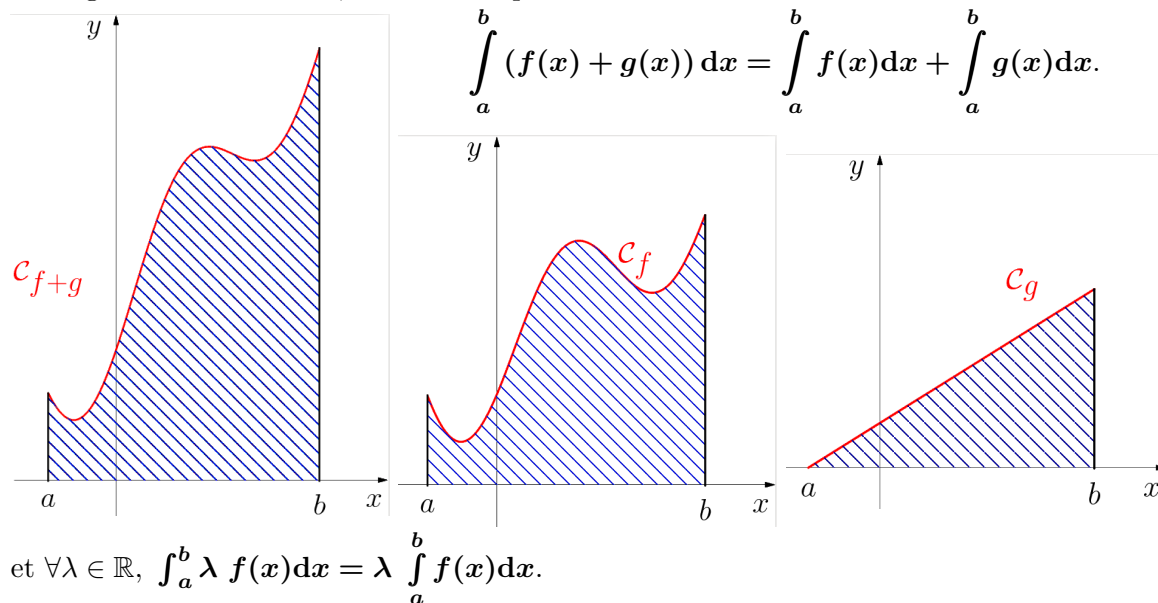
Calculer son intégrale sur $[-1, 3]$.

Théorème 3.0.4 (Linéarité de l'intégrale).

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$.

L'intégration est **linéaire**, c'est-à-dire que :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$



Exemple 3.0.3. Montrer que $\int_2^5 (f(x) + g(x)) \, dx = \int_2^5 f(x) \, dx + \int_2^5 g(x) \, dx$ avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

Théorème 3.0.5 (Positivité de l'intégrale). Si f est **positive** sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

Corollaire 3.0.6 (Cas d'égalité à 0). Soit f continue et **positive** sur I . On a :

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \iff f = 0.$$

Corollaire 3.0.7 (Cas de stricte positivité). Si $f \geq 0$ sur I et si il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$ alors

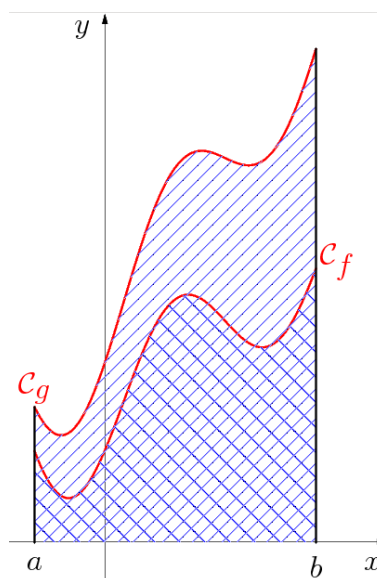
$$\int_a^b f(t) dt > 0.$$

Corollaire 3.0.8 (Croissance de l'intégrale). Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, telles que

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x),$$

alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

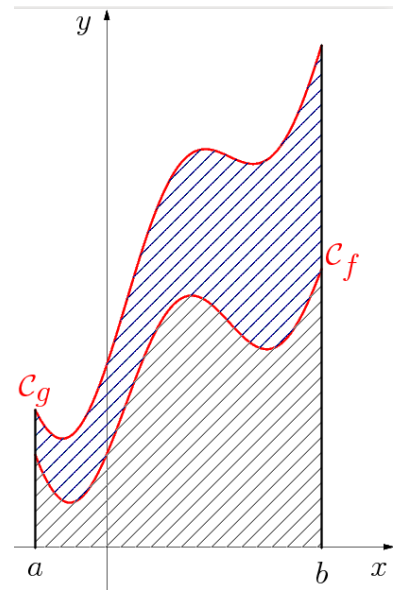


Corollaire 3.0.9 (Aire entre deux courbes). Si f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, telles que

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x),$$

alors l'aire comprise entre les deux courbes vaut

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$



Corollaire 3.0.10 (Intégrale et valeur absolue). Pour tout f continue sur $[a, b]$ avec $a < b$, on a :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Théorème 3.0.11. Soit f telle que :

$$\forall t \in [a, b], m \leq f(t) \leq M$$

alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

Démonstration.

□

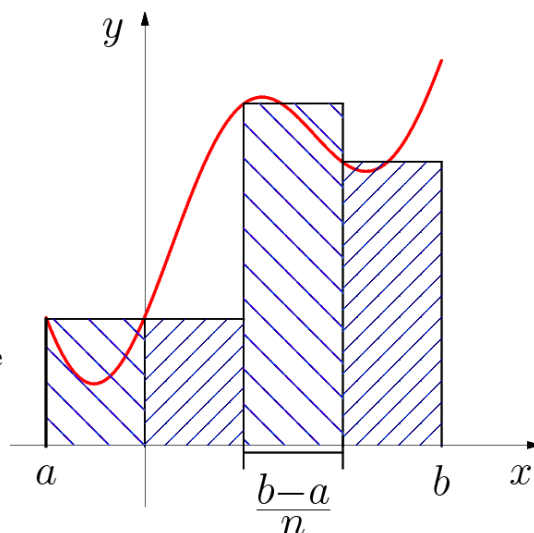
4 Sommes de Riemann

Théorème 4.0.1.

Soit f continue sur $[a, b]$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Numériquement, cette approximation d'une intégrale s'appelle **méthode des rectangles à gauche**.



Démonstration. (On se limite à une démonstration dans le cadre $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$.)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la relation de Chasles sur $[a, b] = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[a + k \frac{b-a}{n}, a + (k+1) \frac{b-a}{n}\right]$, transformer l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ en somme d'intégrales.

2. Justifier qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in [a, b], m \leq f'(t) \leq M$.

3. Montrer que $\forall t \in \left[a + k \frac{b-a}{n}, a + (k+1) \frac{b-a}{n}\right] = I_k$,

$$m \left(t - \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right) \leq f(t) - f\left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \leq M \left(t - \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right)$$

4. En intégrant la relation précédente, montrer que

$$\frac{m}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \leq \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \leq \frac{M}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2$$

5. En déduire :

$$\frac{m}{2} \frac{(b-a)^2}{n} \leq \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \leq \frac{M}{2} \frac{(b-a)^2}{n}$$

6. En déduire

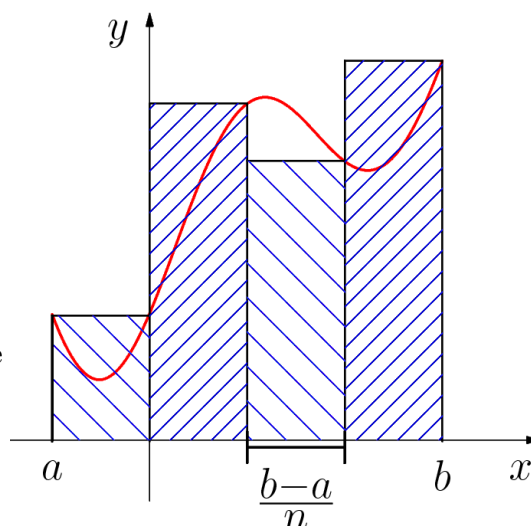
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) = \int_a^b f(t) dt$$

Proposition 4.0.2.

Soit f continue sur $[a, b]$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Numériquement, cette approximation d'une intégrale s'appelle **méthode des rectangles à droite**.



Remarque 4.0.1. On a aussi, sous les mêmes hypothèses,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Corollaire 4.0.3. En particulier, soit f continue sur $[0, 1]$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$$

Exemple 4.0.1. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

5 Étude d'une suite définie par une intégrale

Exemple 5.0.1. Pour tout entier naturel n , on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1 .

(b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

Méthode 5.1. Pour étudier les variations d'une suite définie par une intégrale

$$I_n = \int_a^b f_n(t) dt,$$

on doit déterminer le signe de $I_{n+1} - I_n$:

(a) On utilise la linéarité de l'intégrale pour écrire $I_{n+1} - I_n$ comme une seule intégrale :

$$I_{n+1} - I_n = \int_a^b (f_{n+1}(t) - f_n(t)) dt.$$

(b) On étudie le signe de la fonction sous l'intégrale $f_{n+1}(t) - f_n(t)$ pour $t \in [a, b]$.

Méthode 5.2. Pour étudier le signe d'une expression du type $x^{n+1} - x^n$, on utilise les propriétés suivantes :

- Si $x \in [0, 1]$, alors $x^{n+1} \leq x^n$.
- Si $x \in [1, +\infty]$, alors $x^{n+1} \geq x^n$.

- (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$.

Méthode 5.3. Pour établir la positivité d'une suite définie par une intégrale

$$I_n = \int_a^b f_n(t) dt,$$

on procède en deux étapes :

- i. On montre que $\forall t \in [a, b], f_n(t) \geq 0$.
- ii. On conclut en utilisant la positivité de l'intégrale.

Méthode 5.4. Pour établir la stricte positivité d'une suite définie par une intégrale

$$I_n = \int_a^b f_n(t) dt,$$

on procède en trois étapes :

- i. On montre que $\forall t \in [a, b], f_n(t) \geq 0$.
- ii. On remarque que f_n n'est pas la fonction nulle sur $[a, b]$.
- iii. On conclut en utilisant la stricte positivité de l'intégrale.

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

Méthode 5.5. Pour déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n , on fait une intégration par parties sur I_{n+1} .

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.

Méthode 5.6. Pour vérifier une expression de I_n en fonction de n , on procède par récurrence. Pour l'hérédité :

- On part de l'expression de I_{n+1} en fonction de I_n .
- On utilise l'hypothèse de récurrence sur I_n .
- On simplifie l'expression et on conclut.

(c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.

(d) En déduire la valeur de I_{2n+1} .

3. (a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+2}}{I_n}$.

(b) En déduire, par encadrement, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

4. Utiliser la question 2c) pour compléter les commandes **Scilab** suivantes afin qu'elles permettent de calculer I_n lorsque n est entré par l'utilisateur.

```
1 def I(n):  
2     u=np.pi/2  
3     for..... :  
4         .....  
5     return u
```