

TD 11 - Intégration sur un segment

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \frac{1}{s^3} ds$
2. $\int_0^2 te^{-t^2} dt$
3. $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt$
4. $\int_e^{e^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)^4} d\theta$
6. $\int_0^1 \frac{u^2}{u^2 + 1} du$

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants, calculer l'intégrale :

1. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt$
2. $\int_0^2 \frac{e^y}{e^y + 3} dy$
3. $\int_e^{e^2} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}} dt$
4. $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$
5. $\int_{-1}^1 |x^2 - x| dx$
6. $\int_0^1 \max\left(x, \frac{1}{3}\right) dx$

Exercice 5.

Calculer par changement de variables :

1. $\int_0^{10} \frac{x}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)} dx$ en posant $x = \sqrt{y}$
2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)} dt$ en posant $u = \cos(t)$
3. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \frac{\ln(x)}{x} dx$ en posant $x = \frac{1}{t}$

Exercice 3.

Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 (t^2 + 2t - 3)e^t dt$
2. $\int_0^1 \arctan(t) dt$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)e^{\cos(\theta)} d\theta$
4. $\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$
5. $\int_1^e \ln(t)^2 dt$
6. $\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}} dt$

Exercice 4.

Calculer par changement de variables :

1. $\int_0^3 \frac{t \ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$ en posant $u = 1+t^2$
2. $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$ en posant $t = e^x$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta)^3}{1 + \cos(\theta)} d\theta$ en posant $s = \cos(\theta)$
4. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ en posant $u = \frac{x}{x+1}$

Exercice 6.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T .

1. Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.
2. En déduire que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Exercice 7.

1. Calculer $\int_0^1 \tan(t)dt$.
2. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tan\left(\frac{k}{n}\right)$.

Exercice 8.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$.

1. Montrer que (I_n) est une suite convergente.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
3. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
4. En déduire la limite de I_n .

Exercice 9.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \sqrt{2} \frac{1}{n+1}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 10.

1. Calculer, pour tout $n \geq 2$, $\int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx$.
2. Montrer que $\forall k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx \leq \frac{1}{k \ln k}$.
3. On pose $S_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k}$: montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 11.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante et conclure sur sa convergence.
3. À l'aide d'une intégration par parties, donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} .
4. En déduire une expression de I_n en fonction de n . On distinguera les cas n pair et impair.

Exercice 12.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Calculer u_0 et u_1 .
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln(2)$.
 (c) En déduire que (u_n) est convergente.
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous forme d'une intégrale.
 (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 (c) Donner la limite de la suite (u_n) .

Exercice 13.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n t} dt$$

1. (a) Calculer I_0 .
 (b) Calculer I_1 en posant $x = \sin t$.
2. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
3. (a) Calculer I_2 .
 (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{2(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$$

4. En utilisant les questions 2 et 3-b), déterminer la limite de I_n .

Exercice 14.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \text{ et } J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt.$$

1. Déterminer la monotonie de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.
2. Montrer : $\forall n \geq 0, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. Montrer : $J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$.
4. En déduire la limite de J_n puis celle de nJ_n .

Exercice 15.

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)e^t dt.$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$. En déduire la limite de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$.
4. Montrer : $\forall n \geq 0, I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. En déduire la limite de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ quand $n \rightarrow +\infty$.