

Chapitre 12

Introduction aux espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels

Définition 1.0.1. Un espace E est muni de la loi interne $+$, c'est-à-dire d'une application :

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

et de la loi externe $\cdot$, c'est-à-dire d'une application :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda.x \end{aligned}$$

L'espace ainsi constitué $(E, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel** si

1. (a) la loi $+$ est interne : $\forall (x, y) \in E^2, x + y \in E$
(b) la loi $+$ est associative : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$
(c) la loi $+$ possède un élément neutre noté 0_E : $\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$
(d) tout élément de E possède un symétrique : $\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = 0_E$ et on le note $-x$.
(e) la loi $+$ est commutative : $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$.
2. $\cdot$ est une loi externe :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \lambda.x \in E$$

3. (a) $\forall x \in E, 1.x = x$
(b) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
(c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
(d) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$

Exemple 1.0.1. Montrer que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Proposition 1.0.1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On a :

1. $\forall x \in E, \forall a \in \mathbb{R}, 0.x = O_E, a.O_E = O_E$
2. $\forall x \in E, (-1).x = -x$
3. $\forall x \in E, \forall a \in \mathbb{R}, -(a.x) = (-a).x = a.(-x)$
4. $\forall (a, x) \in \mathbb{R} \times E, a.x = O_E \iff a = 0 \text{ ou } x = O_E$

Démonstration.

□

Exemple 1.0.2. $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois suivantes :
si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose :

- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Exemple 1.0.3. $\mathbb{R}[x]$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois suivantes : l'addition dans $\mathbb{R}[x]$ est l'addition usuelle des polynômes, et la loi externe est le produit du polynôme par un scalaire.

Exemple 1.0.4. $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois suivantes :

si f et g sont des applications de l'ensemble I dans le corps $\mathbb{R}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

- $\forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $\forall x \in I, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x)$.

Exemple 1.0.5. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois suivantes : l'addition est l'addition usuelle des matrices (terme à terme) et la loi externe est le produit d'une matrice par un scalaire (produit de tous les éléments).

Exemple 1.0.6. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs réelles est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois suivantes :

si u et v sont des suites à valeurs réelles et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose :

- $w = u + v$ avec $\forall n \in \mathbb{N} w_n = u_n + v_n$
- $w = \lambda \cdot u$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda \times u_n$

2 Sous-espaces vectoriels.

Dans toute la suite du chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Définition 2.0.1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

On dit que $v \in E$ est une **combinaison linéaire** de $(u_1, \dots, u_n)$ si et seulement si :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

Exemple 2.0.1. 1. Montrer que $P(x) = x + 2 \in \mathbb{R}[x]$ est une combinaison linéaire de $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$.

2. Déterminer l'ensemble des combinaisons linéaires de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Définition 2.0.2. Soit F une partie de E , un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
On dit que F est un **sous espace vectoriel de E** si et seulement si $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Théorème 2.0.1. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $F \subset E$.
2. F est non vide : en particulier, $0_E \in F$,
3. F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall (u, v) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda.u + \mu.v \in F.$$

Méthode 2.1. Pour montrer qu'un espace F est un sous-espace vectoriel de E , on suit pas à pas les trois étapes du théorème 2.0.1 :

1. On montre que $F \subset E$.
2. On montre que $0_E \in F$:
 - (a) On se demande ce qui caractérise l'appartenance à F .
 - (b) On montre que 0_E vérifie cette condition.
3. On montre que F est stable par combinaison linéaire :
Soient u et $v \in F$, soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$, on veut montrer que $\lambda.u + \mu.v \in F$.
 - (a) On écrit explicitement $\lambda.u + \mu.v$.
 - (b) On se demande ce qui caractérise l'appartenance à F .
 - (c) On montre que $\lambda.u + \mu.v$ vérifie cette condition.

Exemple 2.0.2. Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = z\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2.0.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à n .
Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 2.0.3. Montrer que $\mathbb{R}_2[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.

Proposition 2.0.3. Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

3 Familles de vecteurs

3.1 Familles libres

Définition 3.1.1. Soit $u_1, \dots, u_n$ une famille de vecteurs de E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On dit qu'elle est **libre** si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Définition 3.1.2. Une famille qui n'est pas libre est **liée**.
Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

Cette relation est une relation de dépendance linéaire entre $u_1, \dots, u_n$.

Méthode 3.1. Pour **déterminer si une famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre** :

- Si $n = 1$: $\{u\}$ avec $u \neq 0_E$ forme une famille libre.
- Si $n = 2$: $\{u_1, u_2\}$ est libre si et seulement si u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.
- Sinon, on considère $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$.
La famille est libre si et seulement si $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exemple 3.1.1. 1. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-elle libre ?

2. La famille $P_1(x) = x^2 + x + 1$, $P_2(x) = x^2 - x + 1$ et $P_3(x) = x + 2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ est-elle libre ?

Proposition 3.1.1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1. Toute famille de E contenue dans une famille libre de E est libre.
2. Toute famille contenant une famille liée de E est liée.

Théorème 3.1.2. Si une famille est liée, alors un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

Exemple 3.1.2. On pose $e_1 = (1; 2)$, $e_2 = (1; 1)$ et $e_3 = (0; 1)$. Montrer que la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est liée en écrivant l'un de ses vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.

Théorème 3.1.3. Toute famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre.

Exemple 3.1.3. La famille $\{x; 1 + x + x^2; x^3\}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ est-elle libre ?

3.2 Familles génératrices

3.2.1 Définition et propriétés

Définition 3.2.1. Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille d'éléments de E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On dit que cette famille est **génératrice** si et seulement si :

$$\forall w \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, w = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

c'est-à-dire si tout élément de E est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$.

Méthode 3.2. Pour **déterminer si une famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ est génératrice** :

On considère $w \in E$ et on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$w = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$

On écrit le système correspondant à cette équation et on essaye de l'inverser, c'est-à-dire d'exprimer $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en fonction des coordonnées de w .

- Si on y parvient, alors la famille est génératrice et on a déterminé une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$ qui donne w .
- Si le système n'est pas inversible, alors la famille n'est pas génératrice.

Exemple 3.2.1. 1. Montrer que la famille $\{(1;0), (1;1)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que la famille $P_1 = 1, P_2 = x^2 - 1, P_3 = x^2 + x + 1$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$.

Théorème 3.2.1. Dans $\mathbb{R}_n[x]$, toute famille contenant des polynômes de tout degré de 0 à n est génératrice.

Exemple 3.2.2. Montrer que la famille $\{2, x - 1, x^2 + x + 4, x + 3, x^2 + 2x - 4\}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$.

Proposition 3.2.2. Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.

Exemple 3.2.3. La famille $\{1, x, 1 + x + x^2, 7x\}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$?

3.2.2 Sous espace engendré par une famille de vecteurs

Définition 3.2.2. Soit $u_1, \dots, u_n$ une famille d'éléments de E . On note

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

donc, $v \in F$ si et seulement si v est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$.

F est un sous espace de E et s'appelle **sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_n$** .

Remarque 3.2.1. Nécessairement $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ est une famille génératrice de F .

Exemple 3.2.4. Décrire l'espace vectoriel engendré par x et $x^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[x]$.

Remarque 3.2.2. Un espace défini comme étant égal à $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs, c'est donc en particulier un sous-espace vectoriel, il n'est pas nécessaire de le prouver.

Proposition 3.2.3. Si un sous-espace vectoriel contient $u_1, \dots, u_n$, alors il contient $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Théorème 3.2.4. On a $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ si et seulement si F contient chaque u_i et

$$\forall w \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, w = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

Exemple 3.2.5. Démontrer que $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((-1; 0), (1; 1))$.

3.3 Bases

Définition 3.3.1. Une **base** de E est une **famille libre et génératrice**.

Théorème 3.3.1. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E . On a :

$$\forall w \in E, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, w = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Les nombres $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées** de w dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Méthode 3.3. Pour **montrer qu'une famille est une base**, on montre qu'elle est libre et génératrice.

Exemple 3.3.1. Démontrer que $\{(-1; 0), (1; 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 3.3.2. Toute famille de $n + 1$ polynômes de degrés deux à deux distincts de $\mathbb{R}_n[x]$ constitue une base de cet espace.

Exemple 3.3.2. Donner une base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Définition 3.3.2.

- La **base canonique** de $\mathbb{R}^n$ est $\{e_1, \dots, e_n\}$ où

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

- La **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est $\{e_1, \dots, e_n\}$ où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- La **base canonique** de $\mathbb{R}_n[x]$ est

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}.$$