

---

**TD 12 - Introduction aux espaces vectoriels**

---

**Exercice 1.**

Préciser parmi les ensembles suivants ceux qui sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

1.  $F_1 = \{(a, b, 2a + b) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
2.  $F_2 = \{(a, b, 1) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
3.  $F_3 = \{(a + 1, b - 1, a + b) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
4.  $F_4 = \{(a, b, a^2 + b^2) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
5.  $F_5 = \{(a + b, a - 2c, b - c) | (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

**Exercice 2.**

Préciser parmi les ensembles suivants ceux qui sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

1.  $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0, y + z = 0\}$
2.  $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$
3.  $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y = 1\}$
4.  $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 2z = 0\}$
5.  $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + z = 0\}$

**Exercice 3.**

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de taille  $n$  (ie  $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | M = {}^t M\}$ ) est un espace vectoriel.
2. Même question avec les matrices antisymétriques.

**Exercice 4.**

Déterminer une base de chacun des espaces vectoriels déterminés aux exercices 1 et 2

**Exercice 5.**

Préciser parmi les ensembles suivants ceux qui sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

1.  $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tq } f(0) = 0\}$
2.  $F_2 = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue tq } \int_a^b f(t)dt = 0\}$
3.  $F_3 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue } |\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\}$
4.  $F_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ tq } f(0) = 1\}$

**Exercice 6.**

Pour chacun des espaces ci-dessous vérifier que c'est un espace vectoriel et déterminer une base :

1.  $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(5) = 0 \text{ et } P(2) = 0\}$
2.  $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a + 2b & b + c \\ c - b & c + a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
3.  $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P'(0) = 0\}$
4.  $F_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P'(0) = 0\}$
5.  $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | P(1) = P'(1) = 0\}$
6.  $F_6 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = {}^t A\}$

**Exercice 7.**

Préciser parmi les ensembles suivants ceux qui sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et en trouver une base.

1.  $F_1 = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(P) \geq 3\}$
2.  $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1) = 0\}$
3.  $F_3 = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P(1) = 0 \text{ et } P(2) = 0\}$
4.  $F_4 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = 1\}$

**Exercice 8.**

Pour tout  $a$  réel, on pose :

$$F_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + a^2y - a^3 + a^2 + 2a = 0\}$$

Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $F_a$  est un sev de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 9.**

Démontrer que  $\{1, x(x-1), x^2(x+1), x(x-1)^2\}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}_3[x]$ .

**Exercice 10.**

Soit  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{I}$  le sous ensemble des fonctions impaires (i.e :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$ ) et  $\mathcal{P}$  celui des fonctions paires (i.e :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ ).

1. Démontrer que  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{P}$  sont des s.e.v. de  $E$ .
2. Démontrer que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{P} = \{0\}$ .

**Exercice 11.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que  $(x^n, x^{n-1}(x-1), \dots, x(x-1)^{n-1}, (x-1)^n)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}_n[x]$ .

**Exercice 12.**

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la famille  $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$  soit liée.

**Exercice 13.**

On pose  $E = \mathbb{R}^3$  et  $F = \{(2x, 2y, x-3y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un sev de  $E$ .
2. Déterminer une base de  $F$ .

**Exercice 14.**

Soit  $E = \mathbb{R}_3[x]$  et  $F = \{P \in E \mid P(1) = P(2)\}$ .

1. Démontrer que  $F$  est un sev de  $E$ .
2. Donner une base de  $F$ .

**Exercice 15.**

Soit  $E = \mathbb{R}_n[x]$  et  $F = \{P \in E \mid P(1) = P(2)\}$ .

1. Démontrer que  $F$  est un sev de  $E$ .
2. Démontrer que :

$$F = \{(x-1)(x-2)Q + \lambda \mid Q \in \mathbb{R}_{n-2}[x], \lambda \in \mathbb{R}\}$$

3. Donner une base de  $F$ .

**Exercice 16.**

Soit  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  une famille de nombres réels. On note  $f_i$  l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_i(x) = |x - x_i|.$$

Démontrer que  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille libre de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 17.**

On définit  $f_i(x) = e^{\alpha_i x}$  où  $(\alpha_i)$  est une suite strictement croissante.

Démontrer que  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille libre de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .