

Chapitre 13

Variables aléatoires discrètes finies

1 Généralités sur les probabilités

1.1 Espace probabilisable

Définition 1.1.1. Un **ensemble des évènements** sur Ω est une famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω telle que :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$
3. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \mathcal{A}$ alors $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

$(\Omega, \mathcal{A})$ est un **espace probabilisable**.

Définition 1.1.2. Soit Ω un univers et $\mathcal{A}$ un ensemble des évènements sur Ω .

- $(\Omega, \mathcal{A})$ est un **espace probabilisable**
- Tout élément de l'ensemble des évènements $\mathcal{A}$ est appelé un **évènement**.

Exemple 1.1.1. On considère $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$ est un ensemble des évènements sur Ω .
2. On se place dans la situation où le joueur gagne s'il obtient un 6. Montrer que $\{\emptyset, \{6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Omega\}$ est un ensemble des évènements sur Ω .
3. Créer un autre ensemble des évènements sur Ω .

Remarque 1.1.1. Si Ω est un ensemble fini, on prend traditionnellement $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

1.2 Espace probabilisé

Définition 1.2.1. Une **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $P\left(\bigcup_{n \in I} A_n\right) = \sum_{n \in I} P(A_n)$ où les A_n forment une famille d'évènements disjoints.

Exemple 1.2.1. On reprend l'univers et l'ensemble des évènements de l'exemple 3.0.1 question 2. Donner une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Définition 1.2.2. Soit Ω un univers, $\mathcal{A}$ un ensemble des évènements sur Ω et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé **espace probabilisé**.

Proposition 1.2.1. Soit Ω un univers, $\mathcal{A}$ un ensemble des évènements sur Ω et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Soit $A \in \mathcal{A}$ un évènement tel que $P(A) \neq 0$.

Alors P_A est une probabilité et $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.

Exemple 1.2.2. On considère $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$ muni de l'ensemble des évènements $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Soit A l'évènement "Le premier lancer est un pile". Montrer que P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

2 Qu'est-ce qu'une variable aléatoire réelle ?

Définition 2.0.1. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable.

Si X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

alors on dit que X est une **variable aléatoire réelle** (abrégé var).

Définition 2.0.2. Lorsque Ω est un ensemble fini, on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et une variable aléatoire réelle finie est alors une application

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Notation 2.0.3. On introduit les notations suivantes :

- $\{X < a\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < a\}$ où $a \in \mathbb{R}$
- $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\}$ où $a \in \mathbb{R}$
- $\{X = a\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = a\}$ où $a \in \mathbb{R}$
- $\{X \in I\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\}$ où I est un intervalle.

Exemple 2.0.1. On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance 3 fois une pièce équilibrée et on définit X comme le nombre de “faces” obtenus.

1. Justifier que X est une variable aléatoire réelle ?

2. Quel est l'ensemble image $X(\Omega)$ de $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}^3$ par X ?

3. Pour chaque élément $a \in X(\Omega)$, déterminer la probabilité que $X = a$. Cet ensemble de valeurs détermine la loi de X .

3 Fonction de répartition et loi d'une variable aléatoire

Définition 3.0.1. Le système complet associé à une variable aléatoire X est la famille $\{(X = x_i)\}_{x_i \in X(\Omega)}$

Définition 3.0.2. La loi d'une variable aléatoire X est la donnée :

1. du système complet $\{(X = x_i)\}_{x_i \in X(\Omega)}$ associé à X
2. de la famille $P(X = x_i) = p_i$, pour $x_i \in X(\Omega)$.

Remarque 3.0.1. On a $\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = 1$.

Exemple 3.0.1. Donner la loi de la variable aléatoire X qui correspond au maximum de deux lancers d'un dé à quatre faces équilibré.

Définition 3.0.3. La **fonction de répartition** d'une var X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x).$$

Méthode 3.1. Pour déterminer la **fonction de répartition** associée à une va discrète finie X telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on fait une disjonction des cas :

- $x \in]-\infty, x_1[, F_X(x) = P(X \leq x) = 0$
- $x \in [x_1, x_2[, F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = x_1)$
- $x \in [x_2, x_3[, F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$
- ...
- $x \in [x_n, +\infty[, F_X(x) = P(X \leq x) = 1$

Exemple 3.0.2. Donner la fonction de répartition associée à la var X de l'exemple 3.0.1.

Théorème 3.0.1. La loi de X est entièrement déterminée par sa fonction de répartition.

Exemple 3.0.3. Soit X une var finie à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $a \in \mathbb{R}$, exprimer $P(X = a)$ grâce à la fonction de répartition de X .

4 Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle

Définition 4.0.1. L'espérance de la var X est

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k P(X = k)$$

Remarque 4.0.1. On remarque que $E(X)$ ne dépend que de la loi de X . Deux var ayant la même loi vont donc avoir la même espérance.

Exemple 4.0.1. Calculer l'espérance de la var de l'exemple 3.0.1.

Définition 4.0.2. La variance de X est $\text{Var}(X) = E([X - E(X)]^2)$.

Théorème 4.0.1. Formule de König-Huygens

La variance de X peut être calculée grâce à la formule

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Exemple 4.0.2. Calculer la variance de la var de l'exemple 3.0.1.

5 Lois usuelles

5.1 Loi certaine

Définition 5.1.1. On dit que X suit une loi certaine si X ne peut prendre qu'une seule valeur. Ainsi, X suit une **loi certaine** sur $\{x_1\}$ si et seulement si :

$$P(X = x_1) = 1$$

Exemple 5.1.1. Donner un exemple de situation relevant de la loi certaine.

5.2 Loi uniforme

Définition 5.2.1. Une expérience aléatoire qui admet un nombre fini d'issues équiprobables est décrite par une loi uniforme.

On dit que X suit une **loi uniforme** sur $\{x_1, \dots, x_n\}$ si et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = x_i) = \frac{1}{n}.$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$.

Exemple 5.2.1. Donner des exemples de situations relevant de la loi uniforme.

Théorème 5.2.1. Si X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{Var}(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

Démonstration.

□

5.3 Loi de Bernoulli

Définition 5.3.1. Une expérience aléatoire qui admet deux issues possibles (gagné ou perdu, pile ou face, etc) peut être décrite par une var suivant une loi de Bernoulli.

On dit que X suit une **loi de Bernoulli**, ou que X est une variable de Bernoulli **de paramètre** $p \in [0, 1]$ si et seulement si

1. $X(\Omega) = \{0, 1\}$
2. $P(X = 1) = p$

Exemple 5.3.1. Donner des exemples de situations relevant de la loi de Bernoulli.

Théorème 5.3.1. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , on a :

$$E(X) = p \qquad \text{Var}(X) = p(1 - p)$$

Démonstration.

□

5.4 Loi binomiale

Définition 5.4.1. On considère une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p . On répète n fois de manière indépendante cette expérience, et X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. On dit alors que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

On dit que la variable égale au nombre de parties gagnées suit une **loi binomiale de paramètres** n et p , où p est la probabilité de gagner une partie.

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Théorème 5.4.1. Si une variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p , on a :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Considérons la suite (X_i) de variables de Bernoulli égales à 1 si la i^{e} partie est gagnée. Il est clair que :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

Théorème 5.4.2. Une var X suit une loi binomiale de paramètres n et p si et seulement si X est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

On en déduit :

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = np(1 - p)$$

Démonstration.

□

Théorème 5.4.3. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes telles que

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p) \text{ et } X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p),$$

alors :

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$$

Démonstration.

□

6 Variables aléatoires $Y = g(X)$

Théorème 6.0.1. Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire réelle de type fini et $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. On a :

$$E(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k) P(X = k)$$

Exemple 6.0.1. On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes, puis on la remet dans le tas avant de piocher à nouveau, etc. On tire en tout 3 cartes, et on note X la var qui compte les nombres d'as obtenus.

1. Quelle est la loi de X ?

2. Quelle est l'espérance de $Y = X^2$.

Corollaire 6.0.2. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $E(aX + b) = a E(X) + b$.

Démonstration.

□

Proposition 6.0.3. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$.

Exemple 6.0.2. On considère X la var de l'exemple 6.0.1. Déterminer l'espérance et la variance de $Y = 2X - 3$.