
TD 13 - Variables aléatoires réelles finies

Exercice 1.

On considère une va X prenant les valeurs 0, 1, 2, 3. On donne $P(X = 0) = \frac{1}{10}$, $P(X = 1) = \frac{1}{8}$ et $P(X = 2) = \frac{1}{5}$.

1. Déterminer $P(X = 3)$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 2.

Un épicier de quartier estime, à partir d'une étude statistique, que la demande hebdomadaire d'ananas, exprimée en unités, est une variable aléatoire D de loi de probabilité :

k	0	1	2	3	4	5
P(D=k)	0.05	0.15	0.2	0.35	0.15	0.1

1. Calculer la demande moyenne et la variance de la demande.
2. Calculer la probabilité que la demande soit :
 - (a) Inférieure ou égale à 2 ananas
 - (b) Supérieure ou égale à 1 ananas et inférieure ou égale à 3 ananas
 - (c) Strictement supérieure à 2 ananas
 - (d) Supérieure ou égale à 4 ananas, sachant qu'elle est au moins égale à 1 ananas.
3. L'épicier constitue, chaque semaine, un stock de 4 ananas. Il gagne 5 euros par ananas vendu et perd 2 euros par ananas invendu. On note G la variable aléatoire représentant son bénéfice ou sa perte sur une semaine.
 - (a) Exprimer G en fonction de la demande D . En déduire la probabilité pour que l'épicier perde de l'argent sur la vente des ananas.
 - (b) Calculer $E(G)$ et $\text{Var}(G)$.

Exercice 3.

Soit un jeu de 32 cartes et quatre joueurs. On distribue 8 cartes à chaque joueur et on note X_1 le nombre d'as obtenus par le premier joueur.

Déterminer l'espérance de X_1 .

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs, notés A et B lancent respectivement $n + 1$ et n fois une pièce. Soit X et Y les nombres respectifs de faces obtenus par A et B.

1. Étudier les lois de X et Y .
2. Étudier la loi de $X + Y$.

Exercice 5.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

Calculer l'espérance de $Y = \frac{1}{1 + X}$.

Exercice 6.

Sailor écrit à Lulla de la manière suivante : s'il n'a pas écrit hier, il écrit aujourd'hui et s'il écrit aujourd'hui, il y a une chance sur deux qu'il écrive demain.

Déterminer le nombre moyen de lettres envoyées par an.

Exercice 7.

Dans une population, le nombre d'enfants issus d'un individu donné suit une loi $\mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité pour un individu de n'avoir aucun descendant à la n -ème génération.

Trouver une relation entre p_n et p_{n+1} .

Exercice 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On place n boules au hasard dans 3 urnes. Soit X_n la var égale au nombre d'urnes vides.

1. Trouver la loi de X_n .
2. Calculer $E(X_n)$.

Exercice 9.

Soit X une var suivant une loi $\mathcal{B}(n, p)$ et Y une var à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conditionnelle sachant $(X = k)$ est $\mathcal{B}(k, p')$.

Déterminer la loi de Y .

Exercice 10.

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule de la manière suivante : après *chaque* tirage, la boule est remise dans l'urne et on ajoute *de plus* n boules de la couleur qui vient d'être obtenue *avant* le tirage suivant. (n est un entier qui sera précisé dans les questions suivantes).

1. Dans cette question n vaut 0. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi du nombre de boules blanches obtenues au cours des k premiers tirages ? Préciser son espérance et sa variance.
2. Dans cette question on prend $n = 1$. Quelle est la loi du nombre de boules blanches obtenues au cours des deux premiers tirages ? des trois premiers tirages ? Peut-on généraliser les résultats obtenus ?

Exercice 11.

On lance une fléchette au hasard sur un disque de rayon 1 divisé en zone concentriques de rayon $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$. On suppose que la fléchette atteint forcément la cible et ne tombe pas sur une frontière

entre deux zones. Si la fléchette atterrit dans la zone délimitée par les cercles de rayon $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$, le joueur gagne $n - k$ euros.

On note X le gain du joueur. Déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

Exercice 12.

Une variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p . On définit Y :

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \neq 0 \\ \text{une valeur au hasard dans } \llbracket 1, n \rrbracket & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y et son espérance.

Exercice 13.

Une urne contient 10 boules : 7 boules blanches et 3 boules noires. On y effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à vider l'urne et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 14.

On dispose d'un dé truqué. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, la probabilité d'obtenir la face k est égale à $a \times k$. On lance ce dé et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la face obtenue.

1. Calculer le réel a . En déduire la loi de X , puis calculer son espérance et sa variance.
2. On définit la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X}$.
 - (a) Calculer l'espérance de Y .
 - (b) Déterminer la loi de Y et retrouver $E(Y)$.

Exercice 15.

Monsieur M possède 12 cravates, dont 3 à rayures. Chaque matin, il prend une cravate au hasard dans l'armoire et chaque soir il remet la cravate du jour à sa place. On observe Monsieur M pendant 5 jours et on appelle X le nombre de fois où il porte une cravate à rayures pendant ces 5 jours.

1. (a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
 (b) Calculer $P(X = 2)$, $E(X)$ et $\text{Var}(X)$.
2. Monsieur M part en voyage. Il met dans sa valise 5 cravates prises au hasard dans l'armoire. Trouver la loi de probabilité du nombre V de cravates à rayures contenues dans la valise.

Exercice 16.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules dont 1 boule blanche. On y effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
 - (a) Déterminer la loi de X .
 - (b) Calculer l'espérance et la variance de X .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient des boules blanches en proportion p ($0 < p < 1$) et des boules noires en proportion $q = 1 - p$. On y effectue n tirages successifs et avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
 - (a) Déterminer la loi de X .
 - (b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.