

Chapitre 14

Comportement asymptotique des suites

1 Définitions des relations de comparaison

Définition 1.0.1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que :

1. (u_n) est négligeable devant (v_n) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, |u_n| < \varepsilon |v_n|.$$

On le note $u_n = o(v_n)$.

2. (u_n) est équivalente à (v_n) si $(u_n - v_n)$ est négligeable devant (v_n) , c'est à dire :

$$u_n = v_n + o(v_n).$$

On le note $u_n \sim v_n$.

Remarque 1.0.1.

1. Si $u_n = o(1)$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, |u_n| < \varepsilon \times 1$, ce qui est exactement la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
2. Si $u_n \sim 1$, alors $u_n = 1 + o(1)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exemple 1.0.1.

1. Montrer que $u_n = 1 + n$ est négligeable devant $v_n = n^2$.

2. Montrer que $u_n = 1 + n$ est équivalent à $v_n = 2 + n$.

Proposition 1.0.1. Supposons que (v_n) soit non nulle à partir d'un certain rang. On a

$$1. \ u_n = o(v_n) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

$$2. \ u_n \sim v_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Exemple 1.0.2. Reprendre les exemples du 1.0.1.

2 Équivalents classiques

Proposition 2.0.1. Soit f dérivable en x_0 et (u_n) convergeant vers x_0 . On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(u_n) - f(x_0)}{u_n - x_0} = f'(x_0)$$

De cette propriété, on déduit les équivalents classiques suivants :

Théorème 2.0.2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors :

1. $\sin u_n \sim u_n$
2. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
3. $\tan u_n \sim u_n$
4. $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
5. $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
6. $1 - \cos u_n \sim u_n^2/2$

Exemple 2.0.1. Soit $u_n = \frac{2}{3n+2}$. Donner un équivalent de $\ln(1 + u_n)$.

3 Croissances comparées

Proposition 3.0.1. Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. On a :

1. pour tout $\alpha > 0$, $\ln(u_n) = o(u_n^\alpha)$
2. pour tous $\alpha < \beta$, $u_n^\alpha = o(u_n^\beta)$
3. pour tout $\alpha > 0$ et tout $q > 1$, $u_n^\alpha = o(q^{u_n})$
4. En particulier, pour tout $\alpha > 0$, $u_n^\alpha = o(e^{u_n})$.

Exemple 3.0.1. Donner une relation de négligeabilité pour la suite $v_n = \ln\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)$.

Proposition 3.0.2. Pour tout $q > 1$, on a

$$q^n = o(n!)$$

Exemple 3.0.2. Donner une relation de négligeabilité pour la suite $v_n = \frac{3^n}{2^n}$.

4 Propriétés des relations de comparaison

Proposition 4.0.1. Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites réelles. On a :

1. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$
2. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$

Exemple 4.0.1. Montrer que si $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

Exemple 4.0.2. Montrer que les suites $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $w_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$ sont équivalentes.

Proposition 4.0.2. Soient $(u_n), (v_n), (x_n)$ et (y_n) quatre suites réelles. On a :

1. Si $u_n = o(v_n)$ et $x_n = o(y_n)$, alors $u_n x_n = o(v_n y_n)$
2. Si $u_n \sim v_n$ et $x_n \sim y_n$, alors $u_n x_n \sim v_n y_n$

Exemple 4.0.3. 1. Montrer que si $u_n \sim v_n$ et $x_n = o(y_n)$, alors $u_n x_n = o(v_n y_n)$.

2. Montrer que si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n x_n = o(v_n x_n)$.

Exemple 4.0.4. Déterminer un équivalent de $\tan\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Proposition 4.0.3. Si $u_n \sim v_n$ et si v_n non nulle, alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Exemple 4.0.5. Donner un équivalent de $u_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 - 1}$.

Remarque 4.0.1. On peut multiplier et diviser les équivalents, mais

on ne peut pas additionner ou soustraire les équivalents.

Exemple 4.0.6.

1. Donner un équivalent de $u_n = \frac{n}{n+1}$.
2. Donner un équivalent de $v_n = \frac{n^2}{n^2+1}$.
3. Donner un équivalent de $u_n - v_n$.

Théorème 4.0.4. Si $u_n \sim v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Exemple 4.0.7. Déterminer la limite de la suite $u_n = \frac{2n^2}{(3n+1)^2}$.