

TD 14 - Comportement asymptotique des suites

Exercice 1.

1. Les suites suivantes tendent toutes vers $+\infty$. Classez-les de la plus lente à la plus rapide.

$$n \ln(n), \frac{n^2}{\ln(n)}, \frac{3^n}{n^3}, n^{\frac{3}{2}}, 2^n \ln(n).$$

2. Les suites suivantes tendent toutes vers 0. Classez-les de la plus lente à la plus rapide.

$$\frac{n}{2^n}, \frac{(\ln(n))^2}{n}, \frac{1}{n \ln(n)}, \frac{1}{n^2}, n^{10} e^{-n}.$$

Exercice 3.

Déterminer la limite de la suite de terme général :

Exercice 2.

Déterminer les équivalents les plus simples possibles pour les suites suivantes :

$$1. u_n = \frac{n^6 + 4n^2 - 6}{7n^4 - 3n^2 + n}$$

$$2. u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$3. u_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{\ln(n) - 2n^2}$$

$$4. u_n = (n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$$

$$5. u_n = \left(1 + \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{\frac{2}{3}} - 1$$

$$1. u_n = (n^2 + n) \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2n^4}\right)}$$

$$2. u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$$

$$3. u_n = n^2 \tan\left(\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}\right)$$

$$4. u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right)}{\sqrt{e^{\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}} - 1}}$$

$$5. u_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1 + \frac{1}{n}} - 1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Exercice 4.

- Montrer que $\ln(n^2 + n) \sim 2 \ln(n)$.
- Montrer que $e^{n + \frac{1}{n}} \sim e^n$.
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites quelconques. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ces deux suites pour que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

Exercice 5.

Soit u_n une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 + 2n^2 - n \leq u_n \leq n^3 + 2n^2 + 3n$.

- Montrer que $u_n \sim n^3$.
- Montrer que $u_n = n^3 + 2n^2 + o(n^2)$.

Exercice 6.

Déterminer l'expression en fonction de n de la suite (u_n) vérifiant

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

puis en donner un équivalent.

Exercice 7.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.
2. Déterminer la limite de S_n .
3. On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Étudier la monotonie de (u_n) et montrer qu'elle converge.
4. En déduire un équivalent simple de S_n .

Exercice 8.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que $\forall x \in]-1, +\infty], \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
4. En déduire que $H_n \sim \ln(n)$.

Exercice 9.

On se propose de montrer que $\ln(n!) \sim \ln(n^n)$ alors que $n!$ n'est pas équivalent à n^n .

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$.

1. (a) Montrer que pour tout entier

$$k \geq 2, \int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt.$$

- (b) En déduire un encadrement de $\ln(n!)$, puis de u_n , pour tout $n \geq 2$.

2. Conclure.

Exercice 10.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. On admet que chaque terme de cette suite est défini et > 0 .

1. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k .
 (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
 (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$. En déduire la limite de la suite (u_n) .
2. En utilisant le fait que pour $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \ln(n-1) + 1$, montrer que

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

3. En déduire que $u_n \sim \sqrt{2n}$.