
TD 1 - Suite usuelles - Récurrence

Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que la suite (v_n) est constante.
2. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Exercice 2.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}.$$

On pose $v_n = u_n^2$.

1. Montrer que (v_n) est arithmétique.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
4. Calculer $\sum_{n=0}^7 v_n$.

Exercice 3.

On considère la suite (u_n) , définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = 3^n \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+2}$.

1. Calculer les 3 premiers termes de la suite.
2. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique et préciser la raison et le premier terme.

Exercice 4.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{2}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et appartient à $]0, 1[$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 - \frac{1}{u_n}$.
 - (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n .
 - (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n , puis sa limite.

Exercice 5.

Pour chaque suite dire si elle est de type connu et donner ses caractéristiques. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $u_n = 2n + 3$
2. $u_{n+2} = 2u_n$
3. $u_{n+1} = u_n - 4$
4. $u_n = 2u_{n+1}$
5. $u_{n+2} + 9u_n = 6u_{n+1}$
6. $u_{n+1} = (n+1)u_n$
7. $u_{n+1} = -2u_n + 1$
8. $u_n = 3^{n+2}$
9. $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

Exercice 6.

Exprimer explicitement les suites définies par :

1. $u_3 = 6$ et $u_{n+1} = 3u_n$
2. $v_2 = 5$ et $v_{n+1} = v_n - 3$
3. $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 3 - 5w_n$

Exercice 7.

Donner l'expression en fonction de n des suites définies par :

1. $u_1 = 0$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = -u_n + 2$.
2. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
3. $u_1 = 1, u_2 = 0$ et $\forall n \geq 1, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

Exercice 8.

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -3 \\ u_{n+1} = 6u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = -3u_n \end{cases}$$

Montrer que (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, puis exprimer u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 9.

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \\ u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.
2. Exprimer u_n et v_n en fonction de n .
3. Calculer $\sum_{n=0}^9 u_n$.

Exercice 10. *

On définit une suite u par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - n + 2$$

1. Déterminer la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ afin que la suite v de terme général $v_n = u_n - \lambda n$ soit une suite arithmético-géométrique.
2. En déduire une expression explicite de v_n , puis de u_n .

Exercice 11. **

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite vérifiant $u_0 = 0$ et :

$$u_{n+1} = \ln \left(2 + \frac{1}{3} e^{u_n} \right)$$

Déterminer u_n en fonction de n .

Exercice 12.

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^7 u_k$ avec $u_0 = 3$ et $u_{k+1} = u_k + 4$
2. $\sum_{k=3}^8 v_k$ avec $v_0 = 1$ et $v_{k+1} = u_k - 2$
3. $\sum_{k=5}^{17} 2k$

Exercice 13.

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^6 u_k$ avec $u_0 = 2$ et $u_{k+1} = 3u_k$
2. $\sum_{k=2}^9 v_k$ avec $v_0 = 5$ et $v_{k+1} = (-2)v_k$
3. $\sum_{k=5}^{17} 5 \times 4^k$

Exercice 14.

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 15. *

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Exercice 16.

On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ et que $(n+1)! = (n+1) \times n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Exercice 17.

Démontrer que pour tout entier n , $9^{3n+2} + 2 \times 6^{2n} + 1$ est divisible par 7.

Exercice 18.

On rappelle que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les relations :

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_n &= -\frac{2n}{2n+1}u_{n-1} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que : $\binom{2n}{n}u_n = \frac{2}{2n+1}(-4)^n$

Exercice 19.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les relations :

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_1 &= 7 \\ u_{n+2} &= 7u_{n+1} - 10u_n \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 5^n$.

2. Calculer $\sum_{n=0}^8 u_n$.

Exercice 20.

Étudier la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2 \end{cases}$$

On pourra chercher un réel α tel que la suite $(u_n - \alpha)$ soit récurrente linéaire.

Exercice 21.

Démontrer que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

Exercice 22.

Montrer que tout entier $n \geq 2$ possède un diviseur premier.

Exercice 23.

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$