

Chapitre 15

Séries numériques

1 Qu'est-ce qu'une série numérique ?

Définition 1.0.1. Soit (u_n) une suite réelle. La **série de terme général u_n** est la suite des sommes partielles (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Définition 1.0.2. Si la suite (S_n) converge vers ℓ , on dit que la **série converge** et on écrit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \ell$$

On peut alors définir le **reste d'ordre n** de la série par

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.

Remarque 1.0.1. La convergence de la série ne dépend pas des premiers termes de la suite (u_n) , mais la somme de la série, oui.

Exemple 1.0.1.

- La **série harmonique** est la série de terme général $\frac{1}{n}$. Cette série diverge.
- La **série géométrique** de raison $\frac{1}{2}$ est la série de terme général $\frac{1}{2^n}$. Cette série converge.
- La **série de Riemann** d'indice 2 est la série de terme général $\frac{1}{n^2}$. Cette série converge.
- La **série harmonique alternée** est la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$. Cette série converge.

Théorème 1.0.1. Si la série $\sum u_n$ converge, alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Démonstration.

□

La réciproque est fausse.

Exemple 1.0.2. Bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, la série harmonique ne converge pas.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$

2. En déduire que $\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$

3. En déduire que $S_n \sim \ln(n)$

4. Conclure

Corollaire 1.0.2. Divergence grossière
Si (u_n) ne converge pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 1.0.3. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n(3n+1)}{(n-\pi)(n+e)}$.

Proposition 1.0.3. Lien entre convergence d'une suite et d'une série

Soit (u_n) une suite.

La suite (u_n) converge si et seulement si la série de terme général $(u_n - u_{n-1})$ converge.

Démonstration.

□

2 Les séries usuelles

2.1 Séries géométriques

Théorème 2.1.1. Série géométrique

La série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration.

□

Exemple 2.1.1. La série de terme général $u_n = \frac{2}{3^{2n+1}}$ est-elle convergente ?

Théorème 2.1.2.

1. **Série géométrique dérivée première :** La série de terme général nq^{n-1} converge si et seulement si $|q| < 1$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

2. **Série géométrique dérivée seconde :** La série de terme général $n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Démonstration.

□

Exemple 2.1.2. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{6(n^2 - n)}{5^{n+2}}$ et calculer sa somme.

2.2 Série exponentielle

Théorème 2.2.1. Série exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Exemple 2.2.1. La série de terme général $u_n = \frac{1}{n!}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

2.3 Séries de Riemann

Théorème 2.3.1. Série de Riemann

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 2.3.1. La série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut sa somme ?

Proposition 2.3.2.

1. Si deux séries de termes généraux u_n et v_n convergent, avec $\sum u_n = \ell$ et $\sum v_n = \ell'$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge, de somme $\lambda \ell + \mu \ell'$.
2. Si l'une diverge et l'autre converge, la combinaison linéaire diverge.
3. Si les deux séries divergent, on ne peut rien dire.

Exemple 2.3.2. 1. La série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n!}$ est-elle convergente ?

Méthode 2.1.

Pour calculer la somme d'une série de terme général u_n , on peut :

1. Reconnaître une combinaison linéaire de séries usuelles :
 - (a) si le terme général u_n comporte du $\frac{1}{n!}$, on reconnaît une série exponentielle, à un potentiel changement d'indice près.
 - (b) si le terme général u_n comporte du q^n , on reconnaît une série géométrique ou une de ses dérivées.
2. Faire apparaître une somme télescopique (voir exemple 2 ci-dessous).

Exemple 2.3.3.

1. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n^2+1}{2^n}$ et calculer sa somme.

2. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ et calculer sa somme.

3 Convergence des séries à termes positifs.

3.1 Critère de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 3.1.1 (Critère de comparaison des séries à termes positifs).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang $0 \leq u_n \leq v_n$

1. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
2. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Exemple 3.1.1. Étude de série de terme général $u_n = \frac{2 + \sin(n)}{3^n}$.

3.2 Critère de négligeabilité

Théorème 3.2.1 (Critère de négligeabilité des séries à termes positifs).

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives telles que $u_n = o(v_n)$.
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives telles que $u_n = o(v_n)$.
Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple 3.2.1. La série de terme général $u_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$ est-elle convergente ?

3.3 Critère des équivalents des séries à termes positifs

Théorème 3.3.1 (Critère des équivalents des séries à termes positifs).

Si deux suites positives (u_n) et (v_n) sont équivalentes, les séries de termes généraux u_n et v_n ont le même comportement.

Exemple 3.3.1. Étudier la série de terme général $v_n = \ln(\cos \frac{1}{n})$.

Méthode 3.1.

Pour déterminer si une série de terme général u_n converge, on peut :

1. Utiliser le **critère des équivalents** des séries à termes positifs.
2. Utiliser le **critère de négligeabilité** des séries à termes positifs.
3. Utiliser le **critère de comparaison** des séries à termes positifs.

Remarque 3.3.1. Si la série est à termes négatifs alors on peut étudier la convergence de la série $\sum(-u_k)$ pour se ramener à des termes positifs.

4 Convergence absolue.

Définition 4.0.1. La série de terme général u_n est absolument convergente si et seulement si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Théorème 4.0.1. La convergence absolue entraîne la convergence.

Démonstration.

□

Remarque 4.0.1. Attention la réciproque est fausse : Une série convergente n'est pas forcément absolument convergente.

Méthode 4.1.

Pour démontrer qu'une série de terme général u_n qui change de signe converge, on peut essayer de démontrer que la série est absolument convergente.

Exemple 4.0.1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$.