

TD 15 - Séries numériques

Exercice 1.

Étudier la convergence des séries, et si elles convergent, donner leur somme :

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+1}{3^{k+1}}$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}}$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)2^k}{k!}$
5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)}{(k+1)!}$
6. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+k+1}{k!}$
7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k^2+1)2^k}{k!}$
8. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+k+1}{3^k}$

Exercice 3.

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)}{6^n}$
2. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{4^n}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{2^n}$
4. $\sum_{n \geq 1} \frac{n(n+1)}{5^n}$
5. $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \frac{a^k b^{n-k}}{n!}$
6. $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{(n+1)!}$
7. $\sum_{n \geq 0} \frac{nx^n}{n!}$
8. $\sum_{n \geq 2} ne^{-n}$
9. $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$
10. $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \frac{a^k b^{n-k}}{n!}$
11. $\sum_{n \geq k} \frac{\binom{n}{k}}{n!}$

Exercice 4.

Nature de la série de terme général u_n avec :

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $u_n = -\ln(\cos \frac{1}{n})$
3. $u_n = \sin \frac{\pi}{n^2}$
4. $u_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n-1}} - \sqrt{n}$

Exercice 6.

Étudier en fonction de α la nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(\ln \left(\frac{1}{\cos(\frac{1}{n})} \right) \right)^\alpha$$

Exercice 7.

Nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)$$

Discuter en fonction de α .

Exercice 2.

Déterminer la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n^2})$
2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \tan \frac{1}{n}$
3. $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$
4. $u_n = \frac{n-3}{n^2+1}$
5. $u_n = \frac{\sqrt[n]{n}-1}{n}$
6. $u_n = \frac{\ln(1+\sin \frac{1}{n})}{\sqrt{n}}$
7. $u_n = e^{\frac{1}{2^n}} - 1$

Exercice 5.

Nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$
2. $u_n = \frac{\sin(\pi \sqrt{n})}{n^2}$
3. $u_n = 2n \sin \frac{1}{n}$
4. $u_n = \frac{n + \cos n}{e^n + \sin n}$

Exercice 8.

Soit la suite u définie par $u_0 \in]0, 1[$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$. Montrer que la suite u converge. Déterminer sa limite.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer sa somme en fonction de u_0 .
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 0} (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$?
4. Déterminer un équivalent de $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$, en déduire la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 9.

Nature et somme de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$$

Exercice 10.

Nature et somme de la série de terme général :

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right)$$

Indication : calculer $\ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1 + \frac{1}{n+2})$.

Exercice 11.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \ln(1 - 1/n^2)$ converge.
2. Calculer la somme de cette série.

Exercice 12.

Nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})}}$$

Exercice 13.

Nature de la série de terme général v_n définie par :

$$v_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n u_k$$

où la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

Discuter suivant la valeur de α .

Exercice 14.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$ converge et donner la valeur de sa somme.

On pourra poser $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ et introduire une certaine somme T_n pour calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$.

2. *Application* : convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{(2n)!}$ et valeur de sa somme.

Exercice 15.

Soit (u_n) une suite de réels positifs tels que $\sum u_n$ converge. On pose :

$$v_n = \frac{\sqrt{u_n}}{n}$$

Montrer que $\sum v_n$ converge. On pourra étudier la série de terme général $w_n = (\sqrt{u_n} - \frac{1}{n})^2$.

Exercice 16.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + u_n^2) \end{cases}$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.
3. Démontrer que pour tout $n \geq 0, u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.
4. En déduire que la série de terme général u_n converge.

Exercice 17.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= u_n - u_n^2 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) converge.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et donner sa somme.
3. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n = u_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 - u_k)$$

En déduire la nature de la série de terme général $\ln(1 - u_n)$ puis de celle de terme général u_n .

Exercice 18.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante qui tend vers 0. Pour tout entier naturel n on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k.$$

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire sur la série de terme général $(-1)^n a_n$?
3. *Applications* :
 - (a) Etudier la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\ln n}$
 - (b) Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1 + n(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 19.

Dans tout l'exercice, x désignera un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1[$.

1. (a) Montrer que pour tout $t \in [0, x[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=0}^{n-1} t^k - \frac{1}{1-t} = -\frac{t^n}{1-t}$.
 (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \int_0^x -\frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} - \ln(1-x) \right| \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+1}$
3. Montrer alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et préciser la valeur de sa somme.