

Chapitre 16

Variables aléatoires discrètes infinies

1 Système complet d'évènements

Définition 1.0.1. Une famille $(A_i)_{i \in I}$, où I est un sous-ensemble (fini ou non) de $\mathbb{N}$, est un **système complet d'évènements** (ou partition de l'univers) si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. les évènements sont deux à deux disjoints : $\forall (i, j) \in I, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$,
2. les évènements recouvrent Ω : $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Exemple 1.0.1. On pose $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ où $A_i = [10i, 10(i+1) - 1]$ forme une partition de l'univers.

2 Le théorème de la limite monotone

Théorème 2.0.1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite croissante d'évènements**, c'est-à-dire

$$A_n \subset A_{n+1}$$

alors

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Exemple 2.0.1. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On note A l'évènement "Obtenir au moins un 6". Déterminer la probabilité de A .

Théorème 2.0.2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite décroissante d'évènements**, c'est-à-dire

$$A_{n+1} \subset A_n$$

alors

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Corollaire 2.0.3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite quelconque d'évènements**, alors

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right).$$

Exemple 2.0.2. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce équilibrée une infinité de fois. On note A l'évènement "Obtenir uniquement Pile".

Déterminer $P(A)$.

3 Variables aléatoires réelles

Définition 3.0.1. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable.
Si X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

alors on dit que X est une **variable aléatoire réelle** (abrégé var).

Notation 3.0.2. L'évènement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$ est noté $\{X \leq x\}$.

Définition 3.0.3. Soit X une variable aléatoire.
La **fonction de répartition de X** est définie par

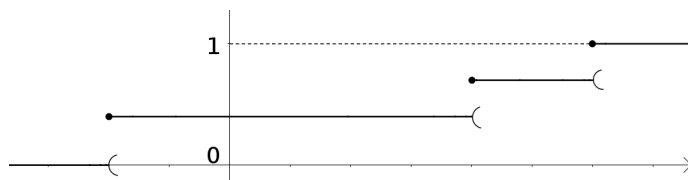
$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto P(X \leq x). \end{aligned}$$

Exemple 3.0.1. Donner la fonction de répartition associée à une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p .

Proposition 3.0.1. La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire réelle X **détermine complètement la loi** de X : si des variables aléatoires ont la même fonction de répartition, alors elles ont la même loi.

Proposition 3.0.2.
Toute fonction de répartition F_X a les propriétés suivantes :

- F_X est croissante
- F_X est continue à droite sur $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$



Méthode 3.1. Pour montrer qu'une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une **fonction de répartition** associée à une variable aléatoire, on vérifie les points suivants :

- F est croissante
- F est continue à droite sur $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Exemple 3.0.2. La fonction $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < -0.5 \\ 0.7 & \text{si } -0.5 \leq x < 1 \\ \frac{3x}{3x+1} & \text{sinon} \end{cases}$ peut-elle être une fonction de répartition ?

Proposition 3.0.3. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X .
Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, on a

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Démonstration.

□

Exemple 3.0.3. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $F_X(n) = 1 - q^n$.
Calculer $P(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4 Variables aléatoires réelles discrètes

4.1 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 4.1.1. Soit X une variable aléatoire réelle. L'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X est appelé **support de X** et est noté $X(\Omega)$.

Ainsi, $X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}, P(X = x) \neq 0\}$.

Définition 4.1.2. Une variable aléatoire X est dite **discrète** si son support est fini ou dénombrable (équipotent à $\mathbb{N}$).

Exemple 4.1.1. Rappeler le support d'une var X suivant loi binomiale de paramètres n et p .

Définition 4.1.3. La loi d'une var discrète X est donnée par

- $X(\Omega)$
- $\forall x \in X(\Omega), P(X = x)$.

Méthode 4.1. Pour déterminer la loi d'une var discrète X , on trouve :

- $X(\Omega)$
- Pour tout $x \in X(\Omega), P(X = x)$.

Exemple 4.1.2. Une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p est répétée jusqu'à obtention d'un succès. On note X le nombre d'essais. Déterminer la loi de X .

Définition 4.1.4. Soit X une variable aléatoire discrète.

Le **système complet d'évènements associé à X** est la famille

$$(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}.$$

Exemple 4.1.3. Donner le système complet d'évènements associé à une var X de loi de Bernoulli de paramètre p .

4.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Définition 4.2.1. La **fonction de répartition** d'une var discrète X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, F_X(a) = P(X \leq a) = \sum_{k \in X(\Omega), k \leq a} P(X = k).$$

Exemple 4.2.1. Donner la fonction de répartition d'une var X qui suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

4.3 Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète

Définition 4.3.1. La var discrète X admet une **espérance** si et seulement si la série

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$$

est absolument convergente.

Remarque 4.3.1. On remarque que $E(X)$ ne dépend que de la loi de X . Deux var discrètes ayant la même loi vont donc avoir la même espérance.

Exemple 4.3.1. Calculer l'espérance de la var X définie dans l'exemple 4.1.2.

Définition 4.3.2. La **variance** de X si elle existe est $\text{Var}(X) = E([X - E(X)]^2)$.

Définition 4.3.3. La var discrète X admet un **moment d'ordre r** ssi la série

$$m_r(X) = E(X^r) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^r P(X = k).$$

est absolument convergente.

Exemple 4.3.2. Calculer le moment d'ordre 3 associé à une var X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

Remarque 4.3.2.

- Une variable aléatoire discrète finie admet des moments à tout ordre.
- Pour une variable aléatoire discrète infinie, il faut prouver la convergence absolue de la série.
- L'espérance correspond au moment d'ordre 1.

Théorème 4.3.1. Formule de König-Huygens

La variable X admet une variance ssi elle admet des moments d'ordre 1 et 2 et dans ce cas :

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Exemple 4.3.3. Calculer la variance de la variable définie à l'exemple 4.1.2.

Définition 4.3.4.

- Une variable aléatoire discrète de **variance égale à 1** est dite **réduite**.
- Une variable aléatoire discrète de **variance égale à 1** et d'**espérance égale à 0** est dite **centrée réduite**.

Proposition 4.3.2. Soit X une variable aléatoire possédant une espérance et une variance, et de variance non nulle. Alors la var discrète

$$X^\star = \frac{X - E(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$$

est centrée réduite.

C'est la **variable aléatoire centrée réduite associée à X** .

Exemple 4.3.4. Donner la var centrée réduite associée à une var X qui suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

4.4 Variables aléatoires discrètes infinies usuelles

4.4.1 Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$.

Définition 4.4.1. On répète une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p de manière indépendante et on appelle X le nombre d'étapes nécessaires à l'obtention du premier succès.

On a alors, si p est la probabilité de succès et $q = 1 - p$:

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = q^{k-1}p$.

On dit que X suit une **loi géométrique de paramètre p** et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et on note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

Exemple 4.4.1. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire qui donne le numéro du lancer correspondant au premier face.

1. Donner la loi de X .

2. Que vaut $P(X = 5)$.

Théorème 4.4.1. Soit X une variable suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$. Cette variable possède une espérance et une variance :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

Démonstration.

□

Proposition 4.4.2. La fonction de répartition de X est une fonction en escalier, dont les sauts sont portés par $\mathbb{N}^*$, et de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_X(n) = 1 - q^n$$

Démonstration.

□

4.4.2 Loi de Poisson.

Définition 4.4.2. On dit que X suit une **loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$** si et seulement si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Théorème 4.4.3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors :

$$E(X) = \lambda \qquad \text{Var}(X) = \lambda$$

Démonstration.

□

4.5 Variables aléatoires $Y = g(X)$

Proposition 4.5.1. Soit X une variable aléatoire réelle discrète et soit $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. La loi de la variable aléatoire $Y = g(X)$ est donnée par :

$$\forall k \in X(\Omega), P(Y = g(k)) = \sum_{i \text{ tq } g(i)=g(k)} P(X = i).$$

Exemple 4.5.1. On dispose d'un jeu de 4 cartes, numérotées respectivement $-2, -1, 1, 2$. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre obtenu et $Y = X^2$. Déterminer les lois de probabilité de X et Y .

Théorème 4.5.2. Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire réelle discrète avec $X(\Omega) \in \mathbb{N}$ et $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors $Y = g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série suivante est absolument convergente :

$$E(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k)P(X = k)$$

Exemple 4.5.2. On reprend les données de l'exemple 4.5.1. Calculer l'espérance de Y .

Corollaire 4.5.3. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $E(aX + b) = a E(X) + b$.

Proposition 4.5.4. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$.

Exemple 4.5.3. Soit X une var qui compte le nombre de 1 obtenus en lançant 10 fois de manière indépendante un dé à 6 faces équilibré. On pose $Y = 2X + 1$. Déterminer l'espérance et la variance de Y .