
TD 16 - Variables aléatoires discrètes infinies

Exercice 1.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = a3^{-k}$.

1. Déterminer a pour que l'on définisse bien ainsi une loi de probabilité.
2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?
3. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
4. On pose la variable $Y = X(X - 1)$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 2.

On procède à des lancers d'un dé dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire égale au numéro du lancer où on obtient pour la première fois un numéro supérieur ou égal à 5. Quelle est la loi de X ?

Exercice 3.

Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v . Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'au premier changement de couleur. Soit X la variable égale au nombre de tirages effectués, et Y la variable égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. (a) Déterminer la loi de X .
(b) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{1}{v} + \frac{1}{b} + 1$.
(c) Montrer que X admet une variance et la calculer.
2. (a) Déterminer $Y(\Omega)$, puis pour tout $k \geq 2$, calculer $P(Y = k)$.
(b) En déduire la loi de Y .

Exercice 4.

On considère un entier naturel $n \geq 2$ et on dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n , chaque numéro apparaissant deux fois.

On effectue au hasard une suite de tirages simultanés de deux boules de cette urne et tant que les deux boules tirées ne portent pas le même numéro, elles sont remises dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On note T la variable égale au rang où l'on obtient pour la première fois deux boules de même numéro. Déterminer la loi de T , ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 5.

On considère une variable X suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Montrer que X est une variable aléatoire sans mémoire sur $\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que

$$\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, P_{(X > n)}(X > n + m) = P(X > m).$$

Exercice 6.

Monsieur Poulidor dispute chaque année 4 courses contre Monsieur Anquetil. Il a, à chaque fois, une probabilité $1/4$ de gagner. Si on note X le nombre d'années nécessaires pour battre Anquetil, déterminer $E(X)$.

Exercice 7.

Deux joueurs lancent un dé l'un après l'autre, le gagnant est le premier obtenant un 6.

1. Quelles sont les probabilités de gain de chacun des joueurs ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait moins de 20 lancers ?

Exercice 8.

1. Déterminer a pour que l'expression :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = a \frac{k^3 + 1}{k!}$$

définisse un loi de probabilité.

2. Étudier alors $E(X)$.

Exercice 9.

Soit X une var à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \mu/4^n$$

1. Déterminer μ .
2. Comparer la probabilité que le résultat soit pair et celle qu'il soit impair.

Exercice 10.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. Si on tire une boule noire, la partie s'arrête, sinon, on remet la boule et on rajoute une blanche.

X étant le nombre de tirages effectués, déterminer sa loi et son espérance.

Exercice 11.

Le nombre de personnes empruntant l'autoroute dans le sens Paris-Lyon suit une loi de Poisson de paramètre λ et dans le sens Lyon-Paris de paramètre μ . Sachant que n véhicules franchissent le péage (de Dijon), quelle est la probabilité que k d'entre-eux viennent de Paris ?

Exercice 12.

On considère le jeu suivant : 5 personnes lancent une pièce. Si une seule d'entre elles a un résultat différent des autres, elle a gagné.

1. Quelle est la probabilité que ceci arrive ?
2. Calculer la probabilité qu'il y ait un gagnant pour la première fois lors de la k -ème partie ?

Exercice 13.

Soit X suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Étudier $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

Exercice 14.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la variable Y par :

$$\begin{cases} X \in 2\mathbb{N} \Rightarrow Y = X/2 \\ X \notin 2\mathbb{N} \Rightarrow Y = 0 \end{cases}$$

Si X suit une loi géométrique de paramètre p , déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

Exercice 15.

Une bactérie a la probabilité p d'être touchée par un laser, on envoie un laser par seconde, et elle ne meurt qu'au bout de trois fois.

Déterminer la loi de sa durée de vie et sa moyenne.

Exercice 16.

Soit un réel $p \in]0, 1[$. On suppose que la fonction de répartition F d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F(n) = 1 - (1 - p)^n$$

Donner la loi de X . En déduire son espérance et sa variance.