

Chapitre 17

Couples de variables aléatoires

1 Couples de variables aléatoires

1.1 Loi d'un couple de variables aléatoires

Définition 1.1.1. Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, alors (X, Y) est appelé couple de variables aléatoires.

Exemple 1.1.1. On lance un dé bleu et un dé blanc dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle X le numéro obtenu avec le dé bleu et Y le numéro obtenu avec le dé blanc. Alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires.

Exemple 1.1.2. On lance les mêmes dés que dans l'exemple précédent. Mais cette fois on appelle X le plus petit des deux résultats et Y le plus grand. Alors (X, Y) est aussi un couple de variables aléatoires.

Définition 1.1.2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Déterminer la loi du couple (X, Y) ou loi conjointe de X et Y , c'est donner :

- $X(\Omega)$
- $Y(\Omega)$
- $P([X = x] \cap [Y = y])$, pour tout couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Exemple 1.1.3. Déterminer la loi de (X, Y) dans l'exemple 1.1.1

Exemple 1.1.4. Déterminer la loi de (X, Y) dans l'exemple 1.1.2

1.2 Lois conditionnelles et lois marginales.

Définition 1.2.1. La loi de X conditionnellement à l'évènement $(Y = y)$ est définie par la donnée, pour tout x de $X(\Omega)$ de : $P_{(Y=y)}(X = x)$

Exemple 1.2.1. Déterminer la loi de Y conditionnellement à $X = 4$ dans l'exemple 1.1.2

Théorème 1.2.1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes, alors, par la formule des probabilités totales (les ensembles $\{X = x\}_{x \in X(\Omega)}$ et $\{Y = y\}_{y \in Y(\Omega)}$ étant des systèmes complets d'événements), les lois de X et Y appelées lois marginales, sont données par les formules suivantes :

$$\forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y])$$

$$\forall y \in Y(\Omega), P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y])$$

Corollaire 1.2.2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Si l'on connaît la loi marginale de X , ainsi que la loi de Y sachant $(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$, alors par la formule des probabilités composées :

$$\forall y \in Y(\Omega), P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)P_{(X=x)}(Y = y).$$

Remarque 1.2.1. De manière analogue, si l'on connaît la loi marginale de Y , ainsi que la loi de X sachant $(Y = y)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$ alors

$$\forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y)P_{(Y=y)}(X = x)$$

Méthode 1.1. Pour déterminer la loi d'une variable Y dont on connaît la loi conditionnellement à une variable X , on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support $Y(\Omega)$ à partir de celui de X et de la loi de Y conditionnellement à X .
2. On considère le système complet d'événements associé à X : $\{X = n, n \in X(\Omega)\}$.
3. Pour $k \in Y(\Omega)$, on détermine $P(Y = k)$ en appliquant la formule des probabilités totales :

$$P(Y = k) = \sum_{n \in X(\Omega)} P(Y = k \cap X = n).$$

4. On réduit alors la somme en trouvant les conditions sur n pour que les événements $Y = k$ et $X = n$ ne soient pas incompatibles.
5. On applique la formule des probabilités composées :

$$P(Y = k) = \sum_{n \in X(\Omega)} P(X = n)P_{(X=n)}(Y = k).$$

6. On remplace les probabilités par leurs valeurs et on calcule la somme.

Exemple 1.2.2. Supposons que Y suive une loi de Poisson de paramètre λ et que la loi conditionnelle de X sachant $Y = n$ soit $\mathcal{B}(n, p)$, alors X suit une loi de Poisson de paramètre λp .

1.3 Indépendance

Théorème 1.3.1. Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y)$$

Exemple 1.3.1. Les variables X et Y de l'exemple 1.1.1 sont-elles indépendantes ?

Exemple 1.3.2. Les variables X et Y de l'exemple 1.1.2 sont-elles indépendantes ?

2 Loi de la somme, Loi du max, Loi du min

Théorème 2.0.1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes et g une application de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. La variable $Z = g(X, Y)$ est alors également discrète.

Corollaire 2.0.2. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, alors $X + Y$, $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$ et XY sont des variables aléatoires discrètes.

2.1 Loi de la somme

Méthode 2.1. Pour déterminer la loi de la va $X + Y$ quand on connaît les lois de X et de Y , avec X et Y indépendantes, on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support $(X + Y)(\Omega)$ à partir de ceux de X et Y .
2. On considère le système complet d'évènements associé à X : $\{X = n, n \in X(\Omega)\}$.
3. Pour $k \in (X + Y)(\Omega)$, on détermine $P(X + Y = k)$ en appliquant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{n \in X(\Omega)} P(X + Y = k \cap X = n) \\ &= \sum_{n \in X(\Omega)} P(Y = k - n \cap X = n) \end{aligned}$$

4. On réduit alors la somme en trouvant les conditions sur n pour que $k - n \in Y(\Omega)$.
5. On utilise l'indépendance des va X et Y pour se ramener à

$$P(X + Y = k) = \sum_{n \in ??} P(Y = k - n)P(X = n).$$

6. On remplace les probabilités par leurs valeurs et on calcule la somme.

Exemple 2.1.1. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$ alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$

Exemple 2.1.2. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant des lois Poisson de paramètres respectifs λ et μ , alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

2.2 Loi de max, Loi du min.

2.2.1 Loi du max

Méthode 2.2. Pour déterminer la loi de $\max(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ quand on connaît les lois de X et Y , avec X et Y indépendantes et à valeurs entières, on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support de $\max(X, Y)(\Omega)$ à partir de ceux de X et Y .
2. Pour $k \in \max(X, Y)(\Omega)$, on justifie que " $\max(X, Y) \leq k$ " = " $X \leq k$ " $\cap$ " $Y \leq k$ ".
3. On utilise l'indépendance des va X et Y pour se ramener à :

$$P(\max(X, Y) \leq k) = P([X \leq k] \cap [Y \leq k]) = P(X \leq k)P(Y \leq k)$$

4. On utilise les fonctions de répartition de X et Y pour obtenir

$$P(\max(X, Y) \leq k) = F_X(k)F_Y(k)$$

.

5. Enfin on a " $\max(X, Y) = k$ " = " $\max(X, Y) \leq k$ mais pas $\max(X, Y) \leq k - 1$ " car X et Y à valeurs entières, donc

$$P(\max(X, Y) = k) = P(\max(X, Y) \leq k) - P(\max(X, Y) \leq k - 1)$$

Exemple 2.2.1. Retrouver la loi de Y dans l'exemple 1.1.2.

2.2.2 Loi du min

Méthode 2.3. Pour déterminer la loi de $\min(X, Y)$ quand on connaît les lois de X et Y , avec X et Y indépendantes et à valeurs entières, on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support de $\min(X, Y)(\Omega)$ à partir de ceux de X et Y .
2. Pour $k \in \max(X, Y)(\Omega)$, on justifie que " $\min(X, Y) \geq k$ " = " $X \geq k$ " $\cap$ " $Y \geq k$ ".
3. On utilise l'indépendance des va X et Y pour se ramener à :

$$P(\min(X, Y) \geq k) = P([X \geq k] \cap [Y \geq k]) = P(X \geq K)P(Y \geq k)$$

4. On utilise les fonctions de répartitions de X et Y pour avoir :

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1) = 1 - F_X(k - 1)$$

$$P(Y \geq k) = 1 - P(y \leq k - 1) = 1 - F_Y(k - 1)$$

5. On en déduit :

$$P(\min(X, Y) \geq k) = (1 - F_X(k - 1))(1 - F_Y(k - 1))$$

6. Enfin on a " $\min(X, Y) = k$ " = " $\min(X, Y) \geq k$ mais pas $\min(X, Y) \geq k + 1$ " car X et Y à valeurs entières, donc

$$P(\min(X, Y) = k) = P(\min(X, Y) \geq k) - P(\min(X, Y) \geq k + 1)$$

Exemple 2.2.2. Retrouver la loi de X dans l'exemple 1.1.2

2.3 Espérance

Théorème 2.3.1 (Théorème de transfert). Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes. Et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y) . Soit la variable aléatoire $Z = g(X, Y)$, alors, Z admet une espérance ssi

$$E(Z) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y)P([X = x] \cap [Y = y]) \text{ converge absolument}$$

Corollaire 2.3.2 (Linéarité de l'espérance). Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance, alors $X + Y$ admet également une espérance et

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Démonstration.

□

Proposition 2.3.3. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes **indépendantes** admettant une espérance, alors XY admet également une espérance et

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$