
TD 17 - Couple de variables aléatoires discrètes.

Exercice 1.

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère n urnes numérotées de 1 à n . On suppose que pour tout entier k compris entre 1 et n , l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard une urne parmi les n et dans cette urne on tire au hasard une boule. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et N_n la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule obtenue.

1. Déterminer la loi du couple (N_n, X_n) .
2. En déduire la loi de N_n sous forme de somme.
3. Calculer l'espérance et la variance de N_n .

Exercice 2. Il faut se méfier des apparences 1

On se propose de montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires suivant la même loi, et si Z est une variable aléatoire, alors XZ et YZ ne suivent pas nécessairement la même loi.

On lance une fois une pièce équilibrée.

On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le lancer donne *Pile* et qui vaut 0 si le lancer donne *Face* et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si le lancer donne *Face* et 0 si le lancer donne *Pile*. On pose $Z = Y$.

1. (a) Montrer que la variable XZ est certaine.
(b) Qu'en est-il de la variable YZ .
2. Conclure.

Exercice 3.

1. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher, et numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$). On extrait une boule, on la remet dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note X_1 le numéro de la première boule extraite et X_2 le numéro de la deuxième.
 - (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2)
 - (b) En déduire la probabilité de l'évènement $(X_1 = X_2)$
2. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher, et numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$). On extrait une boule, on ne la remet pas dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note Y_1 le numéro de la première boule extraite et Y_2 le numéro de la deuxième.
 - (a) Déterminer la loi du couple (Y_1, Y_2)
 - (b) En déduire la probabilité de l'évènement $(Y_1 = Y_2)$

Exercice 4.

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour lequel il existe un réel a tel que la loi de (X, Y) soit définie par : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{j!} \frac{a}{2^{i+j}}$.

1. Déterminer a .
2. Déterminer les lois marginales.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Justifier que $\frac{X}{1+Y}$ possède une espérance et la calculer.

Exercice 6.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la même loi $\mathcal{G}(p)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$. Admet-elle une espérance ?
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = \max(X, Y)$. Admet-elle une espérance ?
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $I = \min(X, Y)$. Admet-elle une espérance ?
4. Montrer que la variable aléatoire SI admet une espérance et la calculer.

Exercice 7.

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , et on effectue des tirages avec remise dans cette urne. On note X le numéro de la première boule extraite, et Y le numéro de la seconde. On note également I le plus petit des numéros tirés et S le plus grand.

1. Donner la loi de I et de S .
2. Montrer que

$$E(S) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}, \quad E(I) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

puis que

$$V(S) = V(I) = \frac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}$$

3. Déterminer une relation liant X, Y, S et I . En déduire $V(S + I)$.

Exercice 8.

Soit $n \geq 1$, et X, Y des variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}([1, n])$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$, son espérance et sa variance.

Exercice 9.

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$, $P(Y = 1) = P(Y = 2) = \frac{1}{2}$. On pose : $Z = XY$. Déterminer la loi de Z .

Exercice 10. Il faut se méfier des apparences 2

On cherche à montrer que, si X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sont des variables aléatoires telles que X_1 et Y_1 suivent la même loi et X_2 et Y_2 suivent la même loi, alors $X_1 + X_2$ ne suit pas nécessairement la même loi que $Y_1 + Y_2$.

1. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher, et numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$). On extrait une boule, on la remet dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note X_1 le numéro de la première boule extraite et X_2 le numéro de la deuxième.
Donner la loi de X_1 ainsi que celle de X_2
2. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher, et numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$). On extrait une boule, on ne la remet pas dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note Y_1 le numéro de la première boule extraite et Y_2 le numéro de la deuxième.
 - (a) Vérifier que Y_1 suit la même loi que X_1 .
 - (b) En déduire grâce à la formule des probabilités totales, la loi de Y_2 et vérifier que Y_2 suit la même loi que X_2 .
3. Déterminer les supports de $X_1 + X_2$ et de $Y_1 + Y_2$ et conclure quand à l'objectif de l'exercice.

Exercice 11.

On désigne par a et b deux réels appartenant à $]0, 1[$.

On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à lancer simultanément deux pièces, A et B , la pièce A donnant *Pile* avec la probabilité a , la pièce B donnant *Pile* avec la probabilité b . On suppose que ces expériences sont indépendantes les unes des autres et qu'à chaque expérience, les résultats des deux pièces sont indépendants.

On considère les variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ comme suit : X est égale au nombre d'expérience qu'il faut effectuer avant que la pièce A donne *Face* pour la première fois et Y est égale au nombre d'expériences qu'il faut effectuer avant que la pièce B donne *Face* pour la première fois.

1. Déterminer les lois de X et Y ainsi que leur espérance et leur variance.
2. Donner, pour tout entier naturel k , la valeur de la probabilité $P(X \geq k)$.
3. On s'intéresse au nombre d'expérience qu'il faut réaliser avant que l'une au moins des pièces donne *Face* pour la première fois. Pour cela on considère la variable aléatoire $M = \min(X, Y)$.
 - (a) Calculer, pour tout entier naturel k , la probabilité $P(M \geq k)$.
 - (b) En déduire la loi de probabilité de M .
4. Déterminer la probabilité que la pièce B ne donne pas *Face* avant la pièce A , c'est-à-dire la probabilité $P(Y \geq X)$.

Exercice 12.

On lance indéfiniment une pièce, donnant *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $1 - p$ (avec $p \in]0, 1[$ et $p \neq 1/2$).

Les lancers sont supposés indépendants.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note P_k l'évènement "obtenir *Pile* au $k^{\text{ème}}$ lancer". On pose $F_k = \overline{P_k}$.

On appelle série toute suite ininterrompue et maximale de *Piles* ou de *Faces*. Par exemple, si les lancers donnent $P_1, P_2, P_3, F_4, P_5, \dots$ alors la première série est de longueur 3 et c'est une série de *Piles* et la deuxième série est de longueur 1 et c'est une série de *Faces*.

On note X la variable aléatoire égale à la longueur de la première série et Y la variable aléatoire égale à la longueur de la deuxième série.

1. (a) Ecrire, pour tout (i, j) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, l'évènement $(X = i) \cap (Y = j)$ à l'aide de certains des évènements P_k et F_k .
 (b) En déduire la loi du couple (X, Y) .
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

Exercice 13.

Madame A téléphone à n personnes distinctes et la probabilité que chacune d'entre-elles réponde est la même : p . On note X le nombre de correspondants joints.

1. Déterminer la loi de X .
 Elle recommence en essayant de joindre les personnes absentes la première fois. On note Y le nombre de réussites.
2. Déterminer la loi de Y sachant $(X = i)$ et en déduire la loi de Y .
3. On note $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z et son espérance.

Exercice 14.

Soit X une var suivant une loi $\mathcal{B}(n, p)$ et Y une var à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conditionnelle sachant $(X = k)$ est $\mathcal{B}(k, p')$.

Déterminer la loi de Y .

Exercice 15.

Une variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p . On définit Y :

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \neq 0 \\ \text{une valeur au hasard dans } \llbracket 1, n \rrbracket & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y et son espérance.

Exercice 16.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n , $n > 0$. On en tire p , $p \leq n$, et on note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.

1. Déterminer les fonctions de répartition de X et Y .
2. En déduire les lois des deux variables.
3. Calculer l'espérance de chacune.

Exercice 17.

Un QCM comporte 20 questions et chaque question a k , $k \geq 2$, réponses possibles dont une seule est juste.

On effectue une première fois le QCM et on obtient un point par réponse juste.

On effectue alors une deuxième tentative pour les réponses fausses et on obtient $1/2$ point par réponse juste.

Déterminer k pour qu'un candidat répondant au hasard obtienne en moyenne $5/20$.

Exercice 18.

Madame A téléphone à n personnes distinctes et la probabilité que chacune d'entre-elles réponde est la même : p . On note X le nombre de correspondants joints.

1. Déterminer la loi de X .
Elle recommence en essayant de joindre les personnes absentes la première fois. On note Y le nombre de réussites.
2. Déterminer la loi de Y sachant $(X = i)$ et en déduire la loi de Y .

Exercice 19.

On tire successivement, avec remise et indéfiniment une boule dans une urne composée de 5 boules rouges et 5 boules blanches et 10 noires.

1. Soit X le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule noire. Déterminer la loi de X , $E(X)$ et $\text{Var}(X)$.
2. Soit Y le nombre de blanches obtenues avant la première noire.
 - (a) Calculer $P(Y = k | X = l)$ en fonction de k et l .
 - (b) Calculer $P(Y = k, X = l)$.
 - (c) Déterminer la loi de Y .