

Chapitre 17

Espaces vectoriels et dimension

1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.0.1. On dit qu'un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

Exemple 1.0.1. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 1.0.1. De toute famille génératrice de $E \neq \{O_E\}$ on peut extraire une base.

Exemple 1.0.2. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par

$$P_1(X) = 1, P_2(X) = X, P_3(X) = X + 1, P_4(X) = 1 + X^3, P_5(X) = X - X^3.$$

Déterminer une base de E .

Corollaire 1.0.2. Tout **espace vectoriel de dimension finie**, non réduit au vecteur nul, possède une base.

Exemple 1.0.3. Donner une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 1.0.3. Soit E un espace vectoriel engendré par la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$.
Soit $\{f_1, \dots, f_p\}$ une famille libre de E avec $p \leq n$.
Il existe une suite $i_1 < \dots < i_{n-p}$ tels que

$$E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-p}}).$$

Autrement dit, **toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie E peut être complétée en une famille génératrice de E .**

Exemple 1.0.4. 1. Donner une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Montrer que $\{2, X + 1\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Compléter cette famille libre pour former une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 1.0.4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient L une famille libre de E et G une famille génératrice de E alors

$$\text{Card}(L) \leq \text{Card}(G)$$

Exemple 1.0.5. Montrer que la famille $(3, X^2 + 2X, 3X^2 + 2X + 2, X^2 - X + 1)$ est une famille liée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 1.0.5. Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même nombre d'éléments.

Définition 1.0.2. Soit E un espace de dimension finie, sa **dimension** est le **nombre d'éléments d'une base**.

Exemple 1.0.6.

- $\mathbb{R}^n$ est de dimension n .
- $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n + 1$
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension $n \times p$. En particulier $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2 .

Remarque 1.0.1.

Par convention l'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension 0 et le seul espace vectoriel de dimension 0 est l'espace vectoriel nul.

Méthode 1.1. Pour déterminer la dimension d'un sev F on détermine une base de F et la dimension de F est le nombre de d'éléments de cette base.

Exemple 1.0.7. 1. Montrer que $\dim \mathbb{R}^n = n$.

2. Montrer que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$.

Théorème 1.0.6. Soit E un espace de dimension n . On a :

1. Toute famille de plus de $n + 1$ vecteurs est liée.
2. Aucune famille de moins de n vecteurs n'est génératrice.
3. Une famille est une base si et seulement si elle possède deux des trois propriétés suivantes :
 - (a) elle est libre.
 - (b) elle est génératrice.
 - (c) elle possède n éléments.

Exemple 1.0.8. Toute famille de $n + 1$ polynômes de $E = \mathbb{R}_n[X]$ de degrés deux à deux distincts forme une base de E .

Méthode 1.2. Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base de E , on procède par étapes :

1. On montre que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
2. On calcule la dimension de E .
3. On conclut en constatant que la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de E qui a $\dim(E)$ éléments, donc c'est une base de E .

On peut faire exactement le même raisonnement en remplaçant "famille libre" par "famille génératrice".

Exemple 1.0.9. Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 1.0.7. Théorème de la base incomplète

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E , un espace de dimension n .

On peut construire une famille $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ telle que

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E,$$

c'est-à-dire qu'on peut compléter une famille libre de E en une base de E .

Exemple 1.0.10. 1. Déterminer une base du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$x + 3y - 2z = 0.$$

2. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^3$.

2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 2.0.1. Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une famille d'éléments de E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. **Le rang de la famille est la dimension du sous-espace qu'elle engendre :**

$$\text{rang}(e_1, \dots, e_p) = \dim(\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)).$$

Méthode 2.1. Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$:

1. Méthode 1 : On détermine si la famille $\mathcal{F}$ est libre.
 - Si oui, le rang de la famille est son nombre d'éléments.
 - Si non, on considère la famille privée d'un élément pouvant s'écrire en fonction des autres et on recommence le raisonnement.
2. Méthode 2 : On pose A la matrice constituée des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ et on détermine le rang de A (on échelonne A grâce à un pivot de Gauss et on compte le nombre de pivots non nuls).

Exemple 2.0.1. Déterminer le rang de la famille de vecteurs suivante : $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $x_3 = (1, 0, 1, 0)$.

Théorème 2.0.1. Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une famille d'éléments de E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n .

1. $\text{rang}(e_1, \dots, e_p) = p$ si et seulement si la famille est libre.
2. $\text{rang}(e_1, \dots, e_p) = n$ si et seulement si la famille est génératrice.
3. Si $n = p$, alors la famille est une base si et seulement si $\text{rang}(e_1, \dots, e_n) = n$.

3 Sous-espaces vectoriels.

3.1 Dimension et sous-espaces vectoriels

Théorème 3.1.1. Soit F un sous-espace vectoriel de E avec $\dim E = n$, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq n$.

Proposition 3.1.2. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim E = n$. On a

$$\dim F = n \iff F = E$$

Méthode 3.1. Pour démontrer l'égalité de deux espaces vectoriels E et F

1. On détermine la dimension de E .
2. On détermine la dimension de F .
3. On montre que $F \subset E$.
4. On conclut : comme $F \subset E$ et $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Exemple 3.1.1. On considère le sous espace vectoriel $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - 3y + z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $\{(1, 0, -2), (0, 1, 3)\}$ est une base de E .

3.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 3.2.1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . On définit

$$F + G = \{f + g, f \in F \text{ et } g \in G\}.$$

Proposition 3.2.1. Soient p et n deux entiers tels que $0 < p < n$ et $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$, deux sous-espaces d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . On a :

$$F + G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$$

Exemple 3.2.1. Déterminer $F + G$ avec

1. F un sev de E et $G = \{0_E\}$.

2. $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $G = \{(x, y, z), x = 2y\}$.

Théorème 3.2.2. Formule de Grassmann

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Exemple 3.2.2. Appliquer le théorème précédent aux sev F et G de l'exemple 3.2.1 question 2.

3.3 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 3.3.1. Si E est un espace vectoriel et si F et G sont des sous-espaces de E , on dit que la somme $F + G$ est directe si

$$F \cap G = \{O_E\}.$$

On la note alors $F \oplus G$.

Proposition 3.3.1. Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si F et G sont des sous-espaces de E , la somme $F + G$ est directe si et seulement si $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

Démonstration.

□

Exemple 3.3.1. On considère $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R} \right\}$ deux sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Sont-ils en somme directe ?

Proposition 3.3.2. Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si F et G sont des sous-espaces de E , **la somme $F + G$ est directe** si et seulement si **la concaténation des bases de F et de G est une base de $F + G$.**

Exemple 3.3.2. On considère les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On note $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \text{Vect}(v_3)$.

Les espaces vectoriels F et G sont-ils en somme directe dans $\mathbb{R}^4$?

Méthode 3.2. Pour démontrer que deux espaces vectoriels F et G sont en somme directe :

- Méthode 1 : On démontre que $F \cap G = \{O_E\}$.
- Méthode 2 : On démontre que $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$.
- Méthode 3 : On démontre que la concaténation des bases de F et de G forme une base.

Définition 3.3.2. Si E est un espace vectoriel et si F et G sont des sous-espaces de E , on dit que F et G sont supplémentaires dans E si

$$F \oplus G = E.$$

Alors tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Théorème 3.3.3. Soient E un espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous espaces vectoriels de E . On a :

$$F \oplus G = E \iff \begin{cases} \dim F + \dim G = n \\ F \cap G = \{O_E\} \end{cases} \iff \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{O_E\} \end{cases}$$

Remarque 3.3.1. Ainsi tout supplémentaire G de F est de dimension :

$$\dim G = \dim E - \dim F$$

Exemple 3.3.3. On considère les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On note $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \text{Vect}(v_3)$.

Les espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Théorème 3.3.4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

Exemple 3.3.4. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y = 0\}$ et $E = \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que F est un sev de E .

2. Déterminer un supplémentaire de F dans E .