
TD 17 - Espaces vectoriels et dimension

Exercice 1.

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère $F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0, 2x - y + z = 0\}$. Déterminer une base de F .

Exercice 2.

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère $F = \{(x, y, z) \mid x + 2y = 0, x - y + z = 0\}$. Déterminer une base de F .

Exercice 3.

Démontrer que pour tout entier n , la famille de polynômes $P_k = X^{n-k}(X-1)^k$ pour $0 \leq k \leq n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4.

Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(2, 1, 3, -1)$, $(4, 2, 1, 5)$, $(3, 1, 5, 2)$, et $(5, 2, 3, 8)$.

Exercice 5.

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on pose :

$$a = (1, 2, 3, 4), \quad b = (1, 1, 1, 3), \quad c = (2, 1, 1, 1), \quad d = (-1, 0, -1, 2), \quad e = (2, 3, 0, 1)$$

Soit $U = \text{Vect}(a, b, c)$ et $V = \text{Vect}(d, e)$. Déterminer les dimensions de U , V , $U \cap V$, $U + V$.

Exercice 6.

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $x = (2, 3, -1)$, $y = (1, -1, -2)$, $u = (3, 7, 0)$, $v = (5, 0, -7)$. Montrer que :

$$\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(u, v)$$

Exercice 7.

Déterminer le rang de la famille $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

Déterminer le rang de la famille $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.

Dans $E = \mathbb{R}^3$, montrer que $F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ sont supplémentaires.

Exercice 10.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$, $G = \{aX \mid a \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 11.

Soit E un espace vectoriel tel que toute famille libre ait moins de n éléments. Montrer que $\dim E \leq n$.

Exercice 12.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et :

$$F = \{P \in E \mid P(0) = 0\} \quad G = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$$

1. Démontrer que F et G sont des sev de E .
2. Déterminer les dimensions de F et G .
3. Démontrer que $F + G = E$

Exercice 13.

Soient F et G deux sev de E , un ev de dimension n , tels que $\dim F + \dim G > n$.
Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Exercice 14.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et de base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Les familles suivantes sont-elles des bases de E ?

1. $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_2 + \dots + e_n)$
2. $\mathcal{B}_2 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$

Exercice 15.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On fixe $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la famille $\{1, (X - a), (X - a)^2, \dots, (X - a)^n\}$ est une base de E .
2. Donner les coordonnées de X^p dans cette base.

Exercice 16.

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0 \text{ et } x + 2y - z = 0\},$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 2z = 0\}.$$

1. Déterminer une base de F et une base de G .
2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Décomposer un élément $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans $F \oplus G$.

Exercice 17.

À quelle(s) condition(s) sur $t \in \mathbb{R}$ la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 18.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites réelles.

1. Montrer que $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Donner une base et la dimension de F .

Exercice 19.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + c \text{ où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

1. Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. En donner une base et sa dimension.

Exercice 20.

On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base de F .
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
4. On pose G l'espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3) . Quelle est sa dimension ?
5. Déterminer une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

Exercice 21.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$,

$$F = \left\{ P \in E, \int_0^1 P(t)dt = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Déterminer la constante réelle a telle que $X^k - a \in F$.
3. En déduire une base de F .

Exercice 22.

On considère les sev de $\mathbb{R}^3$ suivants : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y + z\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y - z\}$.

1. Déterminer $\dim E$, $\dim F$, $\dim E \cap F$, $\dim E + F$.
2. En déduire que $E + F = \mathbb{R}^3$.
3. E et F sont-ils supplémentaires ?