

Chapitre 2

Éléments de logique et raisonnements classiques

1 Éléments de logique

1.1 Construction des propositions

Définition 1.1.1. Étant donné deux propositions A et B , on définit des nouvelles propositions :

- $\bar{A}$ se lit “**non A**”, c’est la proposition contraire de A : elle est vraie quand A est fausse et fausse quand A est vraie.
- $A \cap B$ se lit “**A et B**”, c’est la conjonction des propositions A et B : elle est vraie seulement si les propositions A et B sont toutes les deux vraies.
- $A \cup B$ se lit “**A ou B**”, c’est la disjonction des propositions A et B : elle est vraie dès lors qu’une des propositions A ou B est vraie.

Définition 1.1.2. Étant donné deux propositions A et B , l’**implication** $A \Rightarrow B$, en français « Si A alors B », correspond à $\bar{A} \cup B$.

Exemple 1.1.1. Préciser quelles implications peuvent être lues dans les énoncés suivants du langage courant :

1. “Deux paquets de biscuits achetés = 1 gratuit”.
2. “100% des gagnants au loto ont tenté leur chance”.
3. “Ceinture attachée = sécurité au volant”.

Proposition 1.1.1. Négation

La négation de :

- $A \cup B$ est $\bar{A} \cap \bar{B}$
- $A \cap B$ est $\bar{A} \cup \bar{B}$
- $A \Rightarrow B$ est $A \cap \bar{B}$

Définition 1.1.3. L’implication $A \Rightarrow B$ est équivalente à l’implication suivante : $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$. Cette implication est appelée **contraposée** de $A \Rightarrow B$.

Exemple 1.1.2. Donner les contraposées des implications suivantes :

- 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x \leq 0) \Rightarrow (\exp(x) \leq 1)$.

2) Si deux droites distinctes sont parallèles, alors elles n'ont pas de point d'intersection.

Définition 1.1.4. Étant donné deux propositions A et B , l'**équivalence** $A \Leftrightarrow B$, en français « **A si et seulement si B** », correspond à $(A \Rightarrow B) \cap (B \Rightarrow A)$.

Exemple 1.1.3. Préciser quelle implication peut être lue dans l'énoncé suivant :

“Les dinosaures nous ont laissé des traces de leur existence à travers les fossiles et ces fossiles attestent de l'existence des dinosaures”.

1.2 Quantificateurs

Notation 1.2.1.

- Le symbole $\exists$ signifie “**il existe**”.
- Le symbole $\exists!$ signifie “**il existe un unique**”.
- Le symbole $\forall$ signifie “**pour tout**”.
- Le symbole $\in$ signifie “**appartenant à**”.
- Le symbole $\notin$ signifie “**n'appartenant pas à**”.

Exemple 1.2.1. Traduire en langage mathématique la phrase :

“Pour tout x entier pair, il existe k entier tel que $x = 2k$.”

Proposition 1.2.1. Soient E un ensemble et $A(x)$ une propriété qui dépend de $x \in E$. **Les négations des phrases logiques** sont les suivantes :

- La négation de “ $\exists x \in E, A(x)$ ” est “ $\forall x \in E, \overline{A}(x)$ ”.
- La négation de “ $\forall x \in E, A(x)$ ” est “ $\exists x \in E, \overline{A}(x)$ ”.

Exemple 1.2.2. On lance un dé trois fois donner le contraire de l'évènement “les trois numéros obtenus sont impairs”.

Exemple 1.2.3. Donner la négation des phrases suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}$

2. $\exists x \in \mathbb{Z}, x$ impair

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y$.

2 Ensembles

2.1 Ensembles usuels

Notation 2.1.1.

- $\emptyset$ est l'ensemble ne contenant aucun élément. Il est appelé ensemble vide.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels : 0, 1, 2, ...
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs : ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels (des fractions).
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

Notation 2.1.2.

- L'ensemble $\{a, b, c, d\}$ est l'ensemble constitué uniquement des nombres a, b, c et d .
- Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leq b$. L'ensemble $\llbracket a, b \rrbracket$ contient tous les entiers entre a et b .
- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. L'ensemble $[a, b]$ est l'intervalle contenant tous les réels compris entre a et b .

Exemple 2.1.1.

1. Écrire de deux manières différentes l'ensemble des entiers 1, 2, 3 et 4.

2. Écrire autrement les ensembles : $\llbracket 1, 5 \rrbracket$ $\llbracket 2, 4 \rrbracket$ $\llbracket 2, 5 \rrbracket$

2.2 Inclusion

Définition 2.2.1. Étant donnés deux ensembles A et B , on dit que **A est inclus dans B**, noté $A \subset B$, si et seulement si :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{x} \in \mathbf{B}$$

ou encore : $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Exemple 2.2.1. Quelles sont les inclusions entre les ensembles usuels ?

Méthode 2.1. Pour démontrer que $A \subset B$, on prend $x \in A$ et on démontre que $x \in B$.

Exemple 2.2.2. Montrer que $\{x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \subset \{x \in \mathbb{R}, \sin(x) = 0\}$.

Définition 2.2.2. Deux ensembles **A** et **B** sont **égaux** s'ils ont les mêmes éléments :

$$A = B \iff \{x \in A \iff x \in B\}$$

Proposition 2.2.1. Soient A et B deux ensembles. On a la propriété de **double inclusion**

$$(A = B) \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$$

Méthode 2.2. On utilise souvent la **double inclusion pour montrer que deux ensembles sont égaux** : on montre que le premier est inclus dans le second puis que le second est inclus dans le premier.

Exemple 2.2.3. Montrer par double inclusion que l'ensemble A des entiers naturels pairs coïncide avec l'ensemble $B = \{n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$.

2.3 Parties d'un ensemble

Définition 2.3.1. Un ensemble **A** est une **partie de l'ensemble E** si A est inclus dans E . L'ensemble des parties de **E** est noté $\mathcal{P}(\mathbf{E})$.

Exemple 2.3.1. Donner toutes les parties de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

2.4 Opérations sur les ensembles

Définition 2.4.1. Soient A et B deux parties de E . On définit

- l'**intersection** de A et B , notée $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, par :

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$

- la **réunion** de A et B , notée $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, par :

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

- le **complémentaire de A dans E** , noté C_E^A ou $\bar{A}$, par :

$$x \in \bar{A} \iff x \in E \text{ et } x \notin A$$

- On généralise par $\bigcap_{i \in I} A_i$ et $\bigcup_{i \in I} A_i$

Exemple 2.4.1.

1. On définit $E = [1; 6]$ et $A = \{1; 3; 4\}$. Déterminer $\bar{A}$.
2. On définit $A = \{-1; 2; 4\}$ et B l'ensemble des entiers relatifs pairs. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Déterminer $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]$.
4. Déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1]$.

Définition 2.4.2. Le **produit cartésien** de deux ensembles A et B est l'ensemble formé des couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mid \mathbf{a} \in \mathbf{A}, \mathbf{b} \in \mathbf{B}\}$$

On peut généraliser pour obtenir $\prod_{i \in I} A_i$.

Notation 2.4.3. On note $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_n = E^n$.

Exemple 2.4.2. Décrire les ensembles suivants :

1. $\mathbb{R}^2$

2. $\mathbb{N}^3$

Proposition 2.4.1. Soient A , B et C des ensembles. On a

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $\overline{\overline{A}} = A$

Proposition 2.4.2 (Lois de Morgan).

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Remarque 2.4.1. On peut généraliser ces relations à plus de deux ensembles :

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \text{ et } \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

2.5 Partition

Définition 2.5.1. Une **partition de l'ensemble E** est un ensemble $\{A_i, i \in I\}$ de parties de E tel que :

- i) $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
- ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = E$

Exemple 2.5.1. On considère un dé tétraédrique, à 4 faces, numérotées de 1 à 4.

1. Décrire Ω l'ensemble des issues possibles.

2. Donner une partition de Ω .

Remarque 2.5.1. Si $\{A_i, i \in I\}$ est une partition de E et si $B \subset E$, on a

$$B = B \cap E = B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

3 Raisonnements usuels

3.1 Réfutation par contre-exemple

Méthode 3.1. Pour démontrer qu'une **proposition** du type « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ » est **fausse**, il suffit de donner **un exemple d'un x qui ne convient pas**.

Exemple 3.1.1. Montrer que $f : x \mapsto x + 1$ n'est pas une fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$.

3.2 Raisonnement par contraposée

Méthode 3.2. Au lieu de montrer que $A \Rightarrow B$, on montre que $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

La rédaction est alors la suivante :

Montrons par contraposition que $A \Rightarrow B$.

On suppose donc que B est faux. Montrons que A est faux.

Exemple 3.2.1. Prouver que « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}$ ».

3.3 Raisonnement par double implication

Méthode 3.3. Pour prouver une **équivalence**, on peut **prouver séparément les deux implications**, directe et réciproque.

Exemple 3.3.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n \text{ pair} \Leftrightarrow n^2 \text{ pair}$.

3.4 Raisonnement par l'absurde

Méthode 3.4. Pour prouver A , on peut montrer que $\overline{A}$ implique à la fois une propriété B et son contraire $\overline{B}$.

La rédaction est alors la suivante :

1. Introduction : Montrons par l'absurde que A est vraie.
2. Supposons que $\overline{A}$ est vraie.
3. Corps de la démonstration.
4. Conclusion : on aboutit à une contradiction (absurdité), donc la propriété de départ A est vraie.

Exemple 3.4.1. Montrer que 0 n'a pas d'inverse réel.