

Chapitre 19

Applications linéaires

1 Application linéaire en dimension quelconque

1.1 Application linéaire

Définition 1.1.1. On considère E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

Soit f une **application** de E dans F , on dit qu'elle est **linéaire** si et seulement si :

- $\forall (u, v) \in E^2, f(u + v) = f(u) + f(v)$
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Notation 1.1.2. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Exemple 1.1.1. Montrer que l'application suivante est linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto 2x + y \end{aligned}$$

Proposition 1.1.1. Soit f une application de E dans F , deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. f est **linéaire** si et seulement si une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

1. $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.
2. $\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.

Méthode 1.1. Pour montrer que $f : E \rightarrow F$ est linéaire, on considère $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, puis on montre que

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Exemple 1.1.2. Montrer que l'application suivante est linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, 3x - y) \end{aligned}$$

Proposition 1.1.2. Soit $f : E \rightarrow F$ une **application linéaire**. Alors

$$f(0_E) = 0_F.$$

Démonstration.

□

Définition 1.1.3. Soit f une **application linéaire** de E dans F , deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. On dit que f est un

- **isomorphisme** si f est bijective
- **endomorphisme** si $E = F$
- **automorphisme** si $E = F$ et si f est bijective

Notation 1.1.4.

- L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.
- L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.

Remarque 1.1.1. Id_E est un automorphisme de E .

Exemple 1.1.3. 1. Montrer que l'application suivante est un endomorphisme.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P' + P \end{aligned}$$

2. Montrer que l'application suivante est un automorphisme.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

Proposition 1.1.3. Une composée d'applications linéaires est linéaire.

Exemple 1.1.4. Calculer $g \circ f$ puis montrer que c'est une application linéaire.

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 & g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y) & (x, y) \mapsto (x + 2y, y) \end{array}$$

Notation 1.1.5.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$,

- pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$,
- on pose $f^0 = \text{Id}_E$.

Exemple 1.1.5. Calculer f^2 où

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + y, -y) \end{array}$$

1.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 1.2.1.

- On appelle **noyau** de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on note :

$$\ker f = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$$

- On appelle **image** de f et on note :

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{v \in F \mid \exists u \in E, f(u) = v\}$$

Méthode 1.2. Pour déterminer le noyau de $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on considère $u \in E$ et on résout l'équation (ou le système d'équations) $f(u) = 0_F$.

Exemple 1.2.1. On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, 2x + 2y) \end{aligned}$$

Déterminer le noyau de f .

Méthode 1.3. Pour déterminer l'image de $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on considère $v \in F$ et on cherche à quelle condition sur v il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$.

Exemple 1.2.2. On reprend l'application linéaire définie dans l'exemple 1.2.1. Déterminer l'image de f .

Théorème 1.2.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E
- $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration.

□

Théorème 1.2.2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est **injective** si et seulement si $\ker f = \{O_E\}$.
2. f est **surjective** si et seulement si $\text{Im } f = F$.

Démonstration.

□

2 Rang d'une application linéaire en dimension finie

2.1 Image d'une base par une application linéaire

Théorème 2.1.1. Soient E et F des espaces vectoriels de **dimension finie**.

Soient $f : E \rightarrow F$ une **application linéaire** et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base de E** .

L'application f est entièrement définie par la donnée des vecteurs $f(e_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

En effet, pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.

On a alors

$$f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n).$$

Exemple 2.1.1. Calculer $f(1, 2)$ sachant que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une application linéaire avec $f(1, 0) = (2, 3, 1)$ et $f(0, 1) = (-2, 0, 1)$.

Corollaire 2.1.2. Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F qui coïncident sur une base de E , alors elles sont égales.

Exemple 2.1.2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(1, 0) = 1$ et $f(0, 1) = 2$.
 Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(1, 1) = 3$ et $g(1, -1) = -1$.
 Montrer que $f = g$.

Théorème 2.1.3. Soient E et F des espaces vectoriels de **dimension finie**.
 Soient $f : E \rightarrow F$ une **application linéaire** et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base de E** .
 Alors on a

$$\mathbf{Im} \, f = \mathbf{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Exemple 2.1.3. Calculer $\mathbf{Im} \, (f)$ pour

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (3x - y, x, -y) \end{aligned}$$

Définition 2.1.1. Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.
 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.
 La **dimension de $\mathbf{Im} \, f$** est appelée **le rang de f** .

Notation 2.1.2. Le rang de f est noté $\mathbf{rg}(f)$.

Exemple 2.1.4. Calculer le rang de l'application linéaire f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - y, 2x - 2y) \end{aligned}$$

Proposition 2.1.4. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

$$\text{rg}(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

2.2 Théorème du rang

Théorème 2.2.1 (Théorème du rang).

Soit $f : E \rightarrow F$ une **application linéaire** et E de dimension finie. Alors,

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\ker(f)).$$

Exemple 2.2.1.

1. Un exemple dans lequel on calcule d'abord le rang puis on en déduit des informations sur le noyau.
 - (a) Calculer la dimension du noyau de l'application définie dans l'exemple 2.1.4.
 - (b) Déterminer une base du noyau.

2. Un exemple dans lequel on calcule d'abord la dimension du noyau puis on en déduit des informations sur le rang et $\text{Im}(f)$.
- (a) Déterminer le noyau de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y)$$

- (b) En déduire le rang de f .

- (c) Donner une base de l'image de f .

Théorème 2.2.2. Soit $f : E \rightarrow F$ une **application linéaire** avec $\dim(E) = \dim(F)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f injective
2. f surjective
3. f bijective
4. $\text{rg}(f) = \dim(F)$

Démonstration.

□

Corollaire 2.2.3. Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme de E .

- Tout endomorphisme injectif de E est un automorphisme de E .
- Tout endomorphisme surjectif de E est un automorphisme de E .

Exemple 2.2.2. Montrer que l'application suivante est un automorphisme.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

3 Applications linéaires usuelles

3.1 Formes linéaires et hyperplans

Définition 3.1.1.

- Une application linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une **forme linéaire**.
- Un **hyperplan** est le **noyau d'une forme linéaire** non nulle.

Exemple 3.1.1. 1. Montrer que l'application suivante est une forme linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto 3x - y \end{aligned}$$

2. Montrer que $\text{Vect}((1, 1))$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3.1.1. En dimension finie, un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension n est un espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Exemple 3.1.2. Un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ est un plan (c'est-à-dire un espace de dimension 2) et un hyperplan de $\mathbb{R}^2$ est une droite (c'est-à-dire un espace de dimension 1).

3.2 Projecteur

Définition 3.2.1. Étant donnés deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E , on a :

$$\forall u \in E, \exists!(u_F, u_G) \in F \times G \text{ tel que } u = u_F + u_G$$

on définit alors la **projection p de E sur F parallèlement à G** par :

$$p(u) = u_F$$

Méthode 3.1. Pour déterminer l'expression du projecteur sur F parallèlement à G , avec F et G deux espaces vectoriels supplémentaires dans E , on procède par étapes :

1. *Analyse* : Soit $u \in E$, on veut écrire $u = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.
 - (a) On caractérise l'appartenance à F : f est de la forme ...
 - (b) On caractérise l'appartenance à G : g est de la forme ...
 - (c) On écrit $u = f + g$ et on détermine les constantes pour que cette égalité soit vraie.
2. *Synthèse* : On vérifie que les f et g trouvés appartiennent respectivement à F et G , puis que $f + g = u$.
3. *Conclusion* : Le projecteur sur F parallèlement à G est

$$\begin{aligned} p : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f. \end{aligned}$$

Exemple 3.2.1. On écrit $E = \mathbb{R}^2$ comme $\underbrace{\text{Vect}((1, 1))}_F \oplus \underbrace{\text{Vect}((1, -1))}_G$. Déterminer la projection de E sur F parallèlement à G .

Théorème 3.2.1. Le projecteur p est un endomorphisme de E et on a les propriétés suivantes :

1. $p \circ p = p$, on dit que **p est idempotent**
2. $\ker p = G$.
3. $\text{Im } p = F$.
4. $\{u \in E \mid p(u) = u\} = \ker(p - \text{Id}_E) = F$.
5. $\text{Id}_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F

Théorème 3.2.2. Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est **idempotent** alors p est un **projecteur** de E .

Méthode 3.2. Pour montrer que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un **projecteur**, on montre que p est idempotent. On peut alors conclure que p est un projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Exemple 3.2.2. Montrer que l'application suivante est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right)$$

4 Lien entre matrices et applications linéaires

4.1 Matrice associée à une application linéaire

Exemple 4.1.1. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, 2x - y). \end{aligned}$$

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Que remarque-t-on si l'on calcule AX ?

Définition 4.1.1. Soient E un espace vectoriel de dimension p , de base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et F un espace vectoriel de dimension finie n , de base $\mathcal{B}_F$. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, on appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$, définie colonne par colonne comme suit :

$$\forall j \in [1, p], \quad C_j = f(e_j).$$

Exemple 4.1.2. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (0, 1, -1)$ et $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2)$ où $f_1 = (1, 0)$ et $f_2 = (0, 1)$. Soit f l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y + 2z, x - y). \end{aligned}$$

Déterminer $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(f)$.

Remarque 4.1.1. Si f est un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ une base de E , on note plus simplement $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ au lieu de $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$. Cette matrice est alors une matrice carrée d'ordre n .

Remarque 4.1.2. La matrice associée à une forme linéaire est une matrice ligne.

Définition 4.1.2. Soit E un espace vectoriel de dimension n .
Pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$ où I_n désigne la matrice identité d'ordre n .

Théorème 4.1.1. L'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F est de dimension $\dim(E) \times \dim(F)$.

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Exemple 4.1.3. Déterminer la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Définition 4.1.3. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ avec

$$\forall i \in [1, n], e_i = (\overbrace{0, \dots, 1, \dots, 0}^{\substack{n \\ \text{position } i}}).$$

Définition 4.1.4. Soient $\mathbb{R}^p$ de base canonique $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^p}$ et $\mathbb{R}^n$ de base canonique $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application linéaire $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A est définie par

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, f((x_1, \dots, x_p)) = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\text{où } \forall i \in [1, n], y_i = a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \dots + a_{i,p} x_p.$$

Exemple 4.1.4. Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

4.2 Image d'un vecteur par une application linéaire

Théorème 4.2.1. Soient E un espace vectoriel de dimension p , de base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et F un espace vectoriel de dimension finie n , de base $\mathcal{B}_F$.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$.

Soit $x \in E$ et $y = f(x) \in F$.

On note X (respectivement Y) le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) formé des coordonnées de x (resp. y) dans la base $\mathcal{B}_E$ (resp. $\mathcal{B}_F$). Alors

$$y = f(x) \Leftrightarrow AX = Y.$$

Exemple 4.2.1. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $f(1, 2)$.

4.3 Rang d'une matrice

Définition 4.3.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, le **rang de la matrice A** est le rang de la famille constituée par ses vecteurs colonnes.

Notation 4.3.2. On le note $\text{rg}(A)$.

Exemple 4.3.1. Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 4.3.1. Une matrice et sa transposée ont même rang.

Exemple 4.3.2. Déterminer le rang de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 4.3.2. Soient E et F deux espaces vectoriels, de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et A la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Alors

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(A).$$

Remarque 4.3.1. Le rang d'une application linéaire est égal au rang de n'importe laquelle de ses matrices.

Exemple 4.3.3. Déterminer le rang de l'application linéaire f canoniquement associée à la matrice A de l'exemple 4.3.1.

4.4 Lien entre opérations sur les matrices et sur les applications linéaires

Proposition 4.4.1. Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B}_E$ et F un espace vectoriel de base $\mathcal{B}_F$. Pour toutes applications linéaires f et $g : E \rightarrow F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(g)$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$$

Théorème 4.4.2. Soient E , F et G trois espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_G$. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$$

Exemple 4.4.1. On utilise les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$. Déterminer la matrice de $g \circ f$ où

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + 2y, y)$$

Corollaire 4.4.3. Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B}$ et f un endomorphisme de E . Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^k$$

Exemple 4.4.2. Déterminer la matrice canoniquement associée à f^2 , où

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + 2y, 2x - y) \end{aligned}$$

4.5 Isomorphismes

Définition 4.5.1. Soit E et F des espaces vectoriels de **même dimension** et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

f est un isomorphisme de E dans F si f est bijective.

Définition 4.5.2. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible ssi il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = B \times A = I_n$. On note alors $B = A^{-1}$ la matrice inverse de A .

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $GL_n(\mathbb{R})$.

Théorème 4.5.1. Soient E et F deux espaces vectoriels de **même dimension**, de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Soit $f : E \rightarrow F$ un endomorphisme de E .

f est un **isomorphisme** de E dans F ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$ est **inversible**.

Dans ce cas,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f))^{-1}$$

Exemple 4.5.1. Déterminer si l'application linéaire f est inversible, et si oui, donner son inverse.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) \\ (x, y) &\mapsto (x + 2y, 2x - y, 0) \end{aligned}$$

5 Le cas particulier des endomorphismes

5.1 Automorphismes

Définition 5.1.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E .
 f est un automorphisme de E si f est bijective.
L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.

Théorème 5.1.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et f un endomorphisme de E .

f est un **automorphisme** de E ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est **inversible**.

Dans ce cas,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$$

Exemple 5.1.1. Déterminer si l'endomorphisme f est inversible. Si oui, déterminer son inverse.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + z, y + z, x + 2z) \end{aligned}$$

Proposition 5.1.2. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **inversible** ssi $\text{rg}(A) = n$.

5.2 Polynômes annulateurs

Définition 5.2.1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et de base $\mathcal{B}$, soit f un endomorphisme de E et soit A la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré r : $P = \sum_{k=0}^r p_k X^k$.

- $P(f)$ est un **endomorphisme** de E défini par $P(f) = \sum_{k=0}^r p_k f^k$.
- $P(A)$ est une **matrice** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $P(A) = \sum_{k=0}^r p_k A^k$.

Exemple 5.2.1. Soit $P = X^2 + X + 1$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

1. Déterminer $P(A)$.

2. Déterminer $P(f)$.

Définition 5.2.2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

- P est un **polynôme annulateur de f** si $P(f) = O_{\mathcal{L}(E)}$.
- P est un **polynôme annulateur de A** si $P(A) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Exemple 5.2.2.

1. Montrer que $P = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$ est un polynôme annulateur de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Soit p un projecteur. Donner un polynôme annulateur de p .