
TD 19 - Applications linéaires

Exercice 1.

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto (x_2, x_1 + x_2) \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto (2x_1x_2, x_1 - x_2) \end{cases} \quad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto 2x + 3y \end{cases}$$

Exercice 2.

Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_1 : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3, P \mapsto (P(1), P(8), P'(2))$
2. $f_2 : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto P''(X) + 3P'(X) - P(X)$
3. $f_3 : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto \int_0^5 2P'(t) + 3P(t)dt$
4. $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \mapsto 3f' - 2f$

Exercice 3.

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f_1 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (3a + 2b, 4c + d)$
2. $f_2 : GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow GL_2(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$
3. $f_3 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \mapsto {}^tM + 3M$
4. $f_4 : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto Tr(M)$ où $Tr(M) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f_5 : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \mapsto MX$

Exercice 4.

Pour les applications linéaires des exercices 1 à 3 écrire la matrice de f dans la(les) base(s) canonique(s).

Exercice 5.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in E, f(x, y, z) = (x + y, x - y, x + y + z)$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 6.

On détermine $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - y, x + 2z, 2x - y + 2z)$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme, puis déterminer son image, puis son noyau.
2. Expliciter f^2 et f^3 .
3. Peut-on trouver $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $a\text{Id} + bf + cf^2 + df^3 = 0$?

Exercice 7.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par

$$f(e_1) = 0_E, \quad f(e_2) = e_1 + 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_3) = e_1$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique.

Déterminer $\text{Im } f$, $\ker f$, $\text{Im } f^2$, $\ker f^2$, $\dots$, $\text{Im } f^n$, $\ker f^n$.

Exercice 8.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x, y, z) = (x + z, 2x + 2z, -x - z)$.

1. Montrer que $\text{Im } f \subset \ker f$.
2. Que peut-on en déduire pour f ?

Exercice 9.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et p l'application définie par :

$$\forall u = (x, y, z) \in E, \quad p(u) = v = \left(\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z, y, -\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z \right)$$

1. Montrer que $p \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que p est un projecteur.
3. Déterminer ses sous-espaces caractéristiques et donner une base de chacun d'eux.

Exercice 10.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $v = (a, b, c) \in E$ tel que $a + b + c = 1$, et $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. On définit l'application p par :

$$\forall u = (x, y, z) \in E, \quad p(u) = u - (x + y + z)v$$

1. Montrer que $p \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que p est un projecteur.
3. Déterminer ses sous-espaces caractéristiques et donner une base de chacun d'eux.

Exercice 11.

Soit D l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P' . Montrer que D est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 12.

Soit E l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et ϕ l'application définie par :

$$\forall f \in E, \phi(f) = f'$$

1. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$ -ev.
2. Démontrer que ϕ est un endomorphisme de E , déterminer son noyau.

Exercice 13.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P + (X - 1)P'$$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f .
3. ***Bonus* : Mêmes questions pour $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 14.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f définie sur E par :

$$\forall P \in E, f(P) = 2P + (2 - 3X)P' + (2X^2 - X + 1)P''$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\ker f$.
3. Déterminer $\text{Im}(f)$
4. ****Bonus :** Mêmes questions pour $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 15. **

Soit E l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On désigne par T l'application qui à tout élément f de E associe $F = T(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t)e^{-t^2} dt$$

Montrer que T est un endomorphisme injectif de E . Est-il surjectif?

Exercice 16.

Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}$ qui à P associe R le reste de la division euclidienne de P par $X - 1$.

1. Démontrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\ker f$ et $\text{Im } f$.

Exercice 17.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f définie sur E par :

$$\forall P \in E, f(P) = P(X + 1) - P(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer le noyau de f .

Exercice 18. *

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Pour tout $u = (u_n) \in E$, on pose $f(u) = v = (v_n)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer son noyau.

Exercice 19. **

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que :

$$\ker(u^2) = \ker(u) \Leftrightarrow \text{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0_E\}$$

Exercice 20. *

Soient u et v deux endomorphismes de E . Montrer que :

$$u \circ v = 0 \iff \text{Im } v \subset \ker u$$

Exercice 21. *

Soient u et v les deux applications définies sur $E = \mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in E, u(P) = XP, v(P) = P'$$

1. Démontrer que u et v sont des endomorphismes de E .
2. Déterminer $v \circ u - u \circ v$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v \circ u^n - u^n \circ v = nu^{n-1}$.

Exercice 22. *

Soient f et g deux endomorphismes de E .

1. Montrer que : $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$.
2. Montrer que : $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.

Exercice 23. **

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in G^F$. Montrer que si f est surjective, alors :

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E, G) \iff g \in \mathcal{L}(F, G)$$

Exercice 24. *

Soient f et g des endomorphismes de E tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\text{Im } f$ et $\ker f$ sont stables par g .

Exercice 25. *

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \text{Id}_E$.

1. Montrer que $g \circ f$ est un projecteur.
2. Montrer que $\ker f$ et $\text{Im } g$ sont supplémentaires.

Exercice 26.

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ des sev de E .

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
2. Déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G .

Exercice 27.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \{P \in E \mid P(2) = 0\}$, $G = \{aX \mid a \in \mathbb{R}\}$ des sev de E .

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
2. Déterminer l'expression de la projection sur F parallèlement à G .